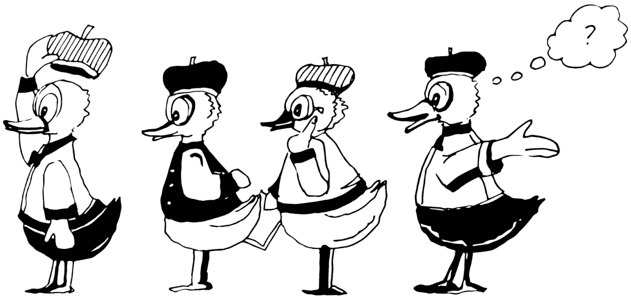
XV. DÜRER VERSENY

Döntő: 2022. február 4-6.

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK



C

KATEGÓRIA

Váltó forduló

9-10. osztályosok

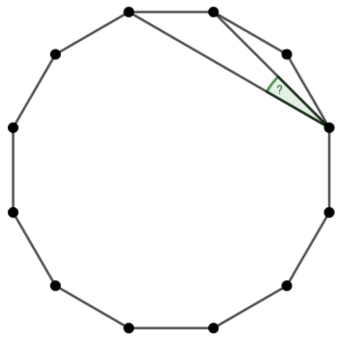
C1. Harminchárom perc, harminchárom másodperc és még háromszor három másodperc az összesen hány másodperc?

Megoldás: $33 \cdot 60 + 33 + 3 \cdot 3 = 1980 + 33 + 9 = 2022$.

C2. Egy prímszámot *középkorúnak* nevezünk, ha a nála 4-gyel kisebb és a nála 4-gyel nagyobb szám is prímszám. Mi a 60-nál kisebb középkorú prímek összege?

Megoldás: Az $n-4$, n és $n+4$ számok különböző maradékot adnak hárommal osztva, így csak akkor lehet mind prím, ha az egyik 3. Csak az $n-4=3$ lehetséges, mert különben $n-4$ negatív. $n=7$ tényleg középkorú, így a megoldás 7.

C3. Az ábrán egy szabályos tizenkétszög látható, melynek be van húzva két átlója. Hány fokos a kérdőjellel jelölt szög?



Megoldás: Számozzuk a négyszög csúcsait sorban úgy, hogy a keresett szög $A_1A_4A_2\sphericalangle$. A szabályos 12-szög egy belső szöge $\frac{10\cdot 180}{12} = 150$ fok. $A_2A_3A_4$ egyenlőszárú míg $A_1A_2A_3A_4$ trapéz, így $A_3A_4A_2\sphericalangle = 15°$ míg $A_3A_4A_1\sphericalangle = 30°$, így a megoldás 15.

C4. Csaba egy 15 m × 15 m-es négyzet alakú terem közepén áll egy olyan munkahelyen, ahol mindenki gondosan betartja azt a járványügyi előírást, hogy semelyik két ember sem mehet 1,5 m-nél közelebb egymáshoz. Legkevesebb hányan vannak még Csabán kívül a teremben, ha Csaba nem tud egyik falhoz sem eljutni anélkül, hogy a többiek megmozdulnának?

Az embereket pontszerűnek tekintjük.

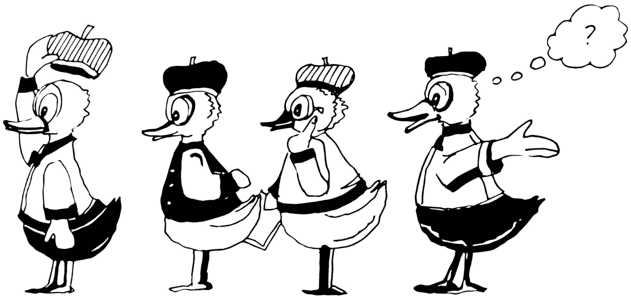
Megoldás: Ha 3 ember áll egy $2,9$ oldalú szabályos háromszögben, aminek Csaba a középpontja, akkor világos, hogy nem tud elmenni a falig, de tartják az előírásokat. Ha csak két ember van Csabán (C) kívül, A és B, akkor legyen D Csaba vetülete az AB egyenesre. Ekkor a CD egyenesen D-től elfelé sétálva (vagy bármelyik irányban az AB-re merőleges egyenesen ha $C=D$) Csaba távolsága nő A-tól és B-től, így betartják a szabályt, és előbb-utóbb eléri a falat.

C5. A kacsanyelvben csak **h**, **á** és **p** betűket használnak. A kacsanyelvben nincs olyan szó, melyben két mássalhangzó szerepel egymás után, mert azokat a kacsák nem tudják kiejteni. Azonban a négybetűs szavak közül az összes többi szónak van értelme a kacsanyelvben. Hány értelmes négybetűs szó van a kacsanyelvben? *Az **á** betű magánhangzónak, a **h** és **p** mássalhangzónak számít a kacsanyelvben is.*

Megoldás: Az **áááá** egy szó. Ha van egy mássalhangzó, akkor az négy helyen lehet, és kétféle lehet, így ez 8 opció. Ha két mássalhangzó van, akkor háromféleképpen állhatnak, az első és harmadik, első és negyedik, vagy második és negyedik helyen. A mássalhangzók $2\cdot 2$-félék lehetnek, így ez 12 opció. Három vagy négy mássalhangzó nem lehet, mert akkor lenne kettő egymás mellett. Így összesen $1+8+12=21$ szó van.

C6. Kacsamama idén 50 tojást tojt, Kacsapapa pedig megtippelte, hogy ebből hány darab lesz fiú kiskacsa és hány darab lány. Miután kikelt az 50 kiskacsa, kiderült, hogy 10%-kal kevesebb lány kiskacsa, és 15%-kal több fiú kiskacsa kelt ki, mint Kacsapapa eredetileg tippelte. Hány fiú kiskacsa kelt ki?

Kacsapapának a fiú és lány kacsákra adott tippjeinek összege 50.



Megoldás: Legyen a fiú és lány tippje f és l. Ekkor $f + l = 50$ és $\frac{90}{100}l + \frac{115}{100}f = 50$. Ezeket összevetve $\frac{1}{10}l = \frac{3}{20}f$, így $2l = 3f$, azaz $f = 20$, tehát 23 fiú kiskacsa kelt ki.

C7. Kartal minden év elején felírja egy mondatban, hogy az adott évszámban melyik számjegy hányszor szerepel. Tavaly (2021-ben) például azt írta fel, hogy

Az idei évszámban 2 darab 2-es, 1 darab 1-es és 1 darab 0-s van.

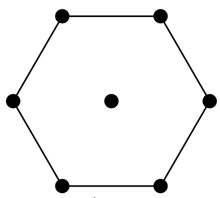
Idén (2022-ben) Kartal mondata így hangzik:

Az idei évszámban 3 darab 2-es és 1 darab 0-s van.

Kartalnak feltűnt, hogy az ebben a mondatban szereplő négy számjegy mind különböző. Legközelebb hány év múlva lesz újra olyan a mondat, hogy a benne szereplő számjegyek mind különbözők?

Megoldás: Nem lehet két számjegy amiből egy van, és kettő amiből kettő, tehát csak az lehet, hogy egy számjegyből egy van és egyből három, vagy egy számjegyből 4. Tehát ami szóba jön 2022 után, az a 2111, de az nem jó, 2202, ami jó, így ez a megoldás.

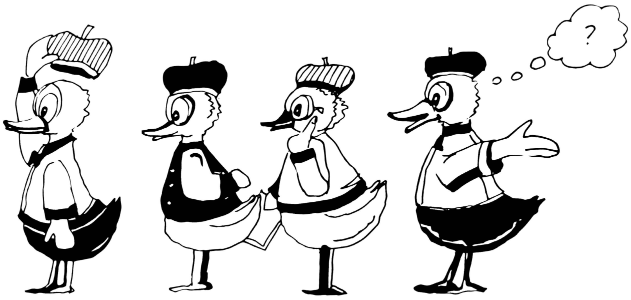
C8. A vízimadarak olimpiáján 7 kacsa szinkronúszó gyakorlatot mutat be. Közülük hatan egy 1 m oldalú szabályos hatszög hat csúcsában helyezkednek el, a hetedik pedig a hatszög középpontjában (lásd ábra). A versenybíró hattyúk a vízszint felett 3 m magasságból nézik a gyakorlatot. Hogy mindegyikük jól tudja értékelni a mutatvány összhangját, úgy szeretnének elhelyezkedni, hogy minden hattyúhoz legyen legalább három kacsa, akik azonos távolságra vannak tőle. Legfeljebb hány hattyú bíró lehet?

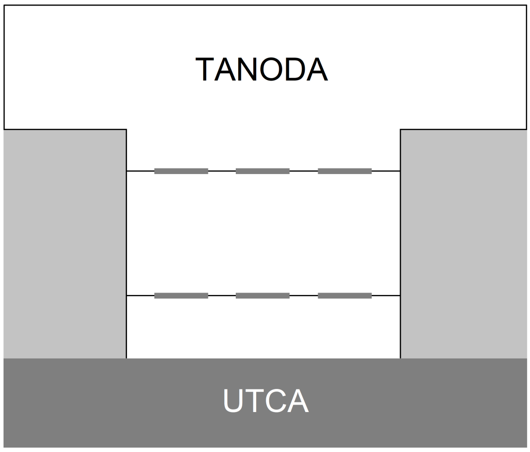


Megoldás: A kérdés az, hogy hány olyan kör van, amin legalább három pont van. A hat külső madárból $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féleképpen lehet kettőt választani. Ebből a szemközti párok egy egyenesre esnek a középponttal, de a többi párhoz ha hozzáadjuk a középpontot akkor kapunk egy kört, és könnyű látni, hogy az összes így kapott kör különböző, ez 12 kör. A hat külső pont egy körön van, így ez meghatároz még egy kört. Ezzel megszámoltuk az összes olyan kört, amin a középpont rajta van, majd az olyanokat, amin nincs, így 13 van.

C9. Dürer kacsatanodájába az ábrán látható módon két ajtósor vezet; mindkét sor három ajtóból áll. Dodó kacsa úgy szeretne bemenni az utcáról a tanodába, hogy mind a hat ajtót pontosan egyszer használja. (Az útja során újra kimehet az utcára, illetve a tanodából is kijöhet, csak az számít, hogy az útja végén a tanodába érkezzen.) Hányféleképpen teheti ezt meg?

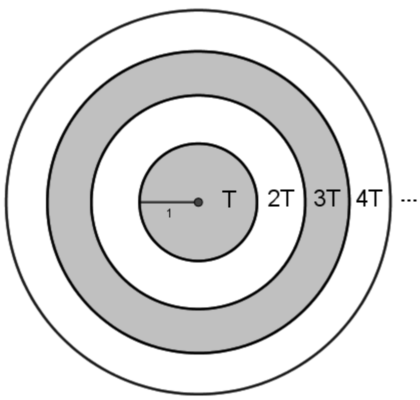
Két útvonalat különbözőnek tekintünk, ha az ajtókat nem ugyanabban a sorrendben járja végig Dodó.





Megoldás: Két lényegesen különböző lehetőségünk van: Vagy középre, majd a tanodába, majd középre, majd ki az utcára, középre, és a tanodába, vagy középre, majd vissza az utcára, majd középre, majd tanoda, középre, tanoda. Könnyű meggondolni, hogy más nem lehet. Mindkét esetben mindkét szinten $3!$-féleképpen választhatjuk, hogy milyen sorrendben használjuk az ajtókat, így összesen $2 \cdot 6 \cdot 6$ opció van.

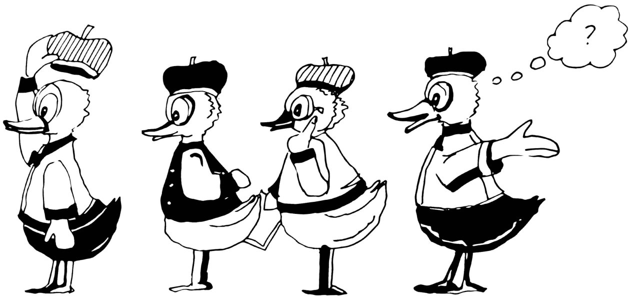
C10. Benedek koncentrikus köröket rajzol az alábbi módon. Az első kör, amit felrajzol, 1 sugarú. Ezután rajzol egy 2. kört úgy, hogy az 1. és 2. körök közötti körgyűrű területe kétszerese legyen az 1. kör területének. Majd rajzol egy 3. kört úgy, hogy a 2. és 3. körök közötti körgyűrű területe háromszorosa legyen az 1. kör területének. És így tovább (lásd ábra).
Melyik az a legkisebb n, melyre az n-edik kör sugara 1-nél nagyobb egész szám lesz?



Megoldás: A kör területképletéből $T = \pi$, így az n. kör területe $\frac{n(n+1)}{2}\pi$, azaz akkor lesz újra egész a sugár, ha $\frac{n(n+1)}{2}$ négyzetszám. Egyszerű végignézni, hogy ez először $n = 8$ esetén teljesül.

C11. Három kacsalábon forgó palota egyenletesen forog; az első 30, a második 50, a harmadik pedig 70 nap alatt fordul körbe. Ma délben mindhárom palota északra néz. Legközelebb hány nap múlva néznek mind egyszerre délre?

Megoldás: Ha n nap múlva délre néznek, akkor $2n$ nap múlva északra. Ismert, hogy legközelebb a legkisebb közös többszörösük, azaz 1050 nap után fognak újra északra nézni. Emiatt leghamarabb 525 nap után lehet, hogy mind délre néznek, és könnyen látszik, hogy ez valóban megoldás.



C12. Egy háromszög egyik szöge ugyanakkora, mint a másik kettő összege, valamint a leghosszabb oldal hosszának négyzete 168 cm^2-rel kisebb a két rövidebb oldal összegének a négyzeténél. Hány cm^2 a háromszög területe?

Megoldás: Derékszögű a háromszög, így $a^2 + b^2 = c^2$. Továbbá tudjuk, hogy $c^2 + 168 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, tehát $ab = 84$, így $T = \frac{ab}{2} = 42$.

C13. Egy focibajnokságban 6 csapat vett részt, és mindegyik csapat mindegyik másikkal pontosan egyszer játszott. Minden győzelemért 3 pont, minden döntetlenért 1 pont és minden vereségért 0 pont járt. Ha a csapatok közül ötnek a végső pontszámai 13, 11, 8, 5 és 0, akkor mennyi lett a hatodik csapat pontszáma?

Megoldás: A 0 pontos csapat öt vereséggel zárt. Emiatt az 5 pontos csapat nyert egyet, így egy győzelem, két döntetlent ért el. A 8 pont csak két győzelem, két döntetlen, egy vereséggel jöhetett ki, míg a 11 pont csak három győzelem, két döntetlennel. A 13 pontos csapat négy győzelmet és egy döntetlent ért el. Emiatt az öt adott csapat összesen 10 győzelem, 7 döntetlen és 8 vereséggel zárt. A hatodik csapat emiatt kettővel többet vesztett, mint nyert, de tudjuk, hogy nyert legalább egyet, mert a 0 pontos csapatot megverte, így csak az lehet, hogy egy győzelem, 1 döntetlen és három vereség lett, azaz négy ponttal zárt a hatodik csapat.

C14. Írjatok néhány pozitív egész számot az alábbi táblázatba úgy, hogy:

- minden szám pontosan annyi legyen, mint ahány vele oldalszomszédos mezőben szerepel szám,
- semelyik két oldalszomszédos mezőben nem szerepel azonos szám (oldalszomszédos üres mezők lehetnek).

Mennyi az ezeknek a feltételeknek megfelelő táblázatban a számok összege? *Minden mezőben legfeljebb 1 szám szerepelhet.*

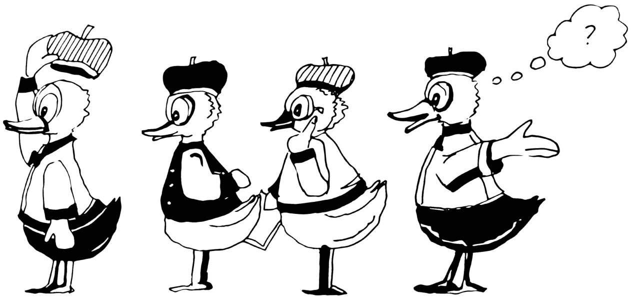
					1
1			3		
		4			2
	2				
					2
1					

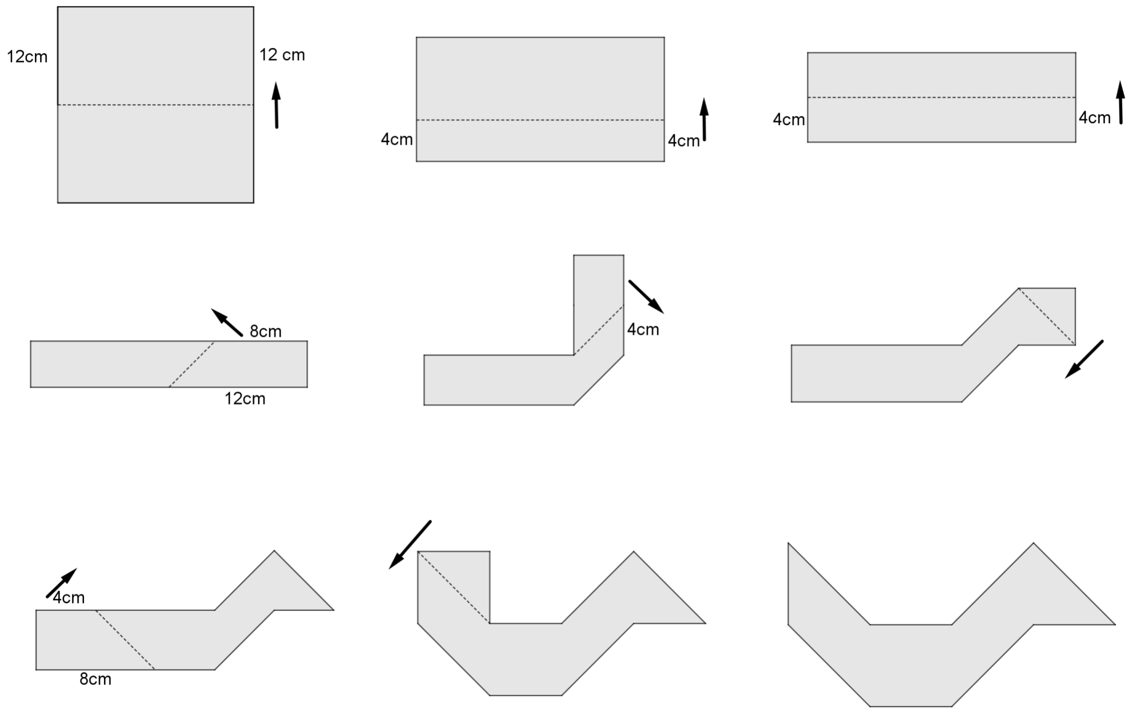
Megoldás: Logikai lépések sorozatával megkapható, hogy csak ez az egyetlen lehetőség az ábra kitöltésére:

					1
1		2	**3**	2	3
2	3	**4**	2		**2**
	2	3		1	3
		2			**2**
1	2	3	1		1

Ebben pedig a számok összege 46.

C15. Csongi megtanította Benedeket, hogyan kell kacsát hajtogatni 8 lépésben egy 24 cm × 24 cm-es papírból. Az ábrákon látható szaggatott egyenes mentén kell a papír egyik felét a másikra hajtani, a nyíl irányában. Miután Benedek meghajtogatta a kacsát, visszacsinált minden lépést, és az így kapott négyzet alakú papírján hajtásvonalakat talált. A lap egyik oldalán kék ceruzával berajzolta azokat a hajtásokat, amik Benedek felé nyíltak, és pirossal azokat, amik az asztal felé nyíltak. Hány cm a különbség a kék vonalak összhossza és a piros vonalak összhossza között?





Megoldás: Figyeljük meg, hogy az első lépésben félbe hajtjuk a papírt, és utána minden hajtás megjelenik a felső és alsó részben is a kihajtogatás után, csak az egyiken piros, másikon kék színnel. Így a második hajtástól minden kiesik, tehát csak az első hajtás számít, azaz a megoldás 24. (Ha nem hiszed, hajtogasd meg.)

C16. Albrecht három kedvenc számának a szorzata 2022, és ha mindhárom számhoz hozzáadunk egyet, akkor a szorzatuk 1514 lesz. Mennyi a három szám négyzeteinek összege, ha a három szám összege 0?

Megoldás: Legyen Albrecht három kedvenc száma a, b és c. Ekkor $abc = 2022$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 1514$ és $a+b+c = 0$.

$$1514 = (a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 2023 + ab + ac + bc,$$

így $ab + ac + bc = -509$. Emiatt

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0 + 2 \cdot 509 = 1018.$$