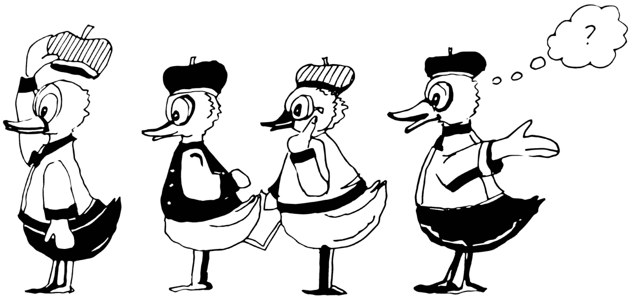
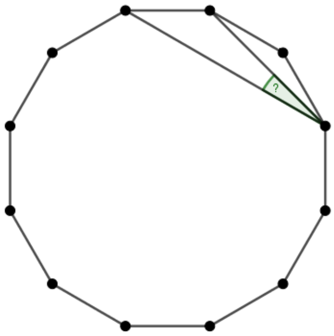


D1. Az ábrán egy szabályos tizenkétszög látható, melynek be van húzva két átlója. Hány fokos a kérdőjellel jelölt szög?



Megoldás: Számozzuk a négyszög csúcsait sorban úgy, hogy a keresett szög $A_1A_4A_2\sphericalangle$. A szabályos 12-szög egy belső szöge $\frac{10\cdot180}{12} = 150$ fok. $A_2A_3A_4$ egyenlőszárú míg $A_1A_2A_3A_4$ trapéz, így $A_3A_4A_2\sphericalangle = 15°$ míg $A_3A_4A_1\sphericalangle = 30°$, így a megoldás 15.

D2. Egy prímszámot *középkorúnak* nevezünk, ha a nála 4-gyel kisebb és a nála 4-gyel nagyobb szám is prímszám. Mi a 60-nál kisebb középkorú prímek összege?

Megoldás: Az $n-4$, n és $n+4$ számok különböző maradékot adnak hárommal osztva, így csak akkor lehet mind prím, ha az egyik 3. Csak az $n-4=3$ lehetséges, mert különben $n-4$ negatív. $n=7$ tényleg középkorú, így a megoldás 7.

D3. Csaba egy 15 m × 15 m-es négyzet alakú terem közepén áll egy olyan munkahelyen, ahol mindenki gondosan betartja azt a járványügyi előírást, hogy semelyik két ember sem mehet 1,5 m-nél közelebb egymáshoz. Legkevesebb hányan vannak még Csabán kívül a teremben, ha Csaba nem tud egyik falhoz sem eljutni anélkül, hogy a többiek megmozdulnának?

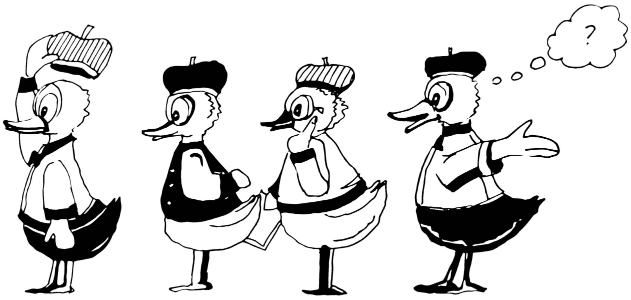
Az embereket pontszerűnek tekintjük.

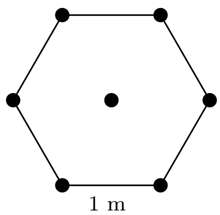
Megoldás: Ha 3 ember áll egy $2,9$ oldalú szabályos háromszögben, aminek Csaba a középpontja, akkor világos, hogy nem tud elmenni a falig, de tartják az előírásokat. Ha csak két ember van Csabán (C) kívül, A és B, akkor legyen D Csaba vetülete az AB egyenesre. Ekkor a CD egyenesen D-től elfelé sétálva (vagy bármelyik irányban az AB-re merőleges egyenesen ha $C=D$) Csaba távolsága nő A-tól és B-től, így betartják a szabályt, és előbb-utóbb eléri a falat.

D4. Hány olyan tízjegyű számjegysorozat van, ami 1 db 4-es, 2 db 3-as, 3 db 2-es és 4 db 1-es számjegyből áll, továbbá bármely két 1-es között van egy 2-es, bármely két 2-es között van egy 3-as, és a két 3-as között van egy 4-es?

Megoldás: Először rakjuk le a négy 1-est. Ezután rakjuk be a 2-eseket, ekkor 1212121 a sorozat. Majd a 3-asokat négyféleképpen lehet lehelyezni, mert mindkettőt lehet az egyes egyik vagy másik oldalára rakni. Nézzük meg, hogy a 4 esetben a 4-est hova rakhatjuk. Ez könnyen látszik, hogy 4, 3, 3 és 2 eset, így a lehetőségek száma $4+3+3+2=12$.

D5. A vízimadarak olimpiáján 7 kacsa szinkronúszó gyakorlatot mutat be. Közülük hatan egy 1 m oldalú szabályos hatszög hat csúcsában helyezkednek el, a hetedik pedig a hatszög középpontjában (lásd ábra). A versenybíró hattyúk a vízszint felett 3 m magasságból nézik a gyakorlatot. Hogy mindegyikük jól tudja értékelni a mutatvány összhangját, úgy szeretnének elhelyezkedni, hogy minden hattyúhoz legyen legalább három kacsa, akik azonos távolságra vannak tőle. Legfeljebb hány hattyú bíró lehet?



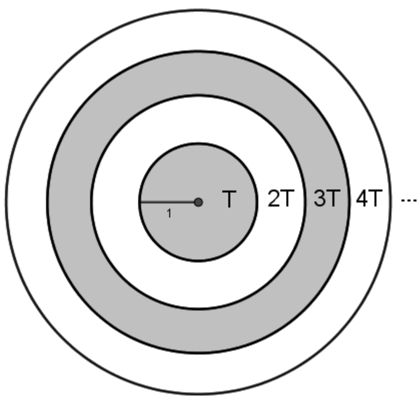


Megoldás: A kérdés az, hogy hány olyan kör van, amin legalább három pont van. A hat külső madárból $\frac{6\cdot5}{2} = 15$-féleképpen lehet kettőt választani. Ebből a szemközti párok egy egyenesre esnek a középponttal, de a többi párhoz ha hozzáadjuk a középpontot akkor kapunk egy kört, és könnyű látni, hogy az összes így kapott kör különböző, ez 12 kör. A hat külső pont egy körön van, így ez meghatároz még egy kört. Ezzel megszámoltuk az összes olyan kört, amin a középpont rajta van, majd az olyanokat, amin nincs, így 13 van.

D6. Három kacsalábon forgó palota egyenletesen forog; az első 30, a második 50, a harmadik pedig 70 nap alatt fordul körbe. Ma délben mindhárom palota északra néz. Legközelebb hány nap múlva néznek mind egyszerre délre?

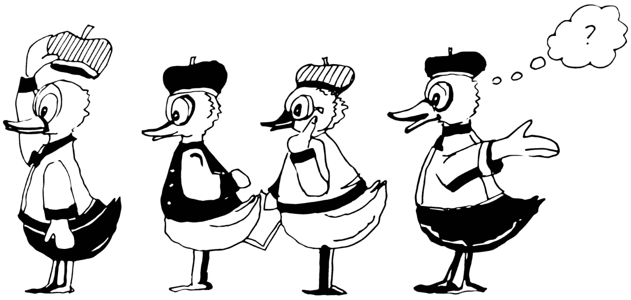
Megoldás: Ha n nap múlva délre néznek, akkor $2n$ nap múlva északra. Ismert, hogy legközelebb a legkisebb közös többszörösük, azaz 1050 nap után fognak újra északra nézni. Emiatt leghamarabb 525 nap után lehet, hogy mind délre néznek, és könnyen látszik, hogy ez valóban megoldás.

D7. Benedek koncentrikus köröket rajzol az alábbi módon. Az első kör, amit felrajzol, 1 sugarú. Ezután rajzol egy 2. kört úgy, hogy az 1. és 2. körök közötti körgyűrű területe kétszerese legyen az 1. kör területének. Majd rajzol egy 3. kört úgy, hogy a 2. és 3. körök közötti körgyűrű területe háromszorosa legyen az 1. kör területének. És így tovább (lásd ábra). Melyik az a legkisebb n, melyre az n-edik kör sugara 1-nél nagyobb egész szám lesz?



Megoldás: A kör területképletéből $T = \pi$, így az n. kör területe $\frac{n(n+1)}{2}\pi$, azaz akkor lesz újra egész a sugár, ha $\frac{n(n+1)}{2}$ négyzetszám. Egyszerű végignézni, hogy ez először $n = 8$ esetén teljesül.

D8. Egy focibajnokságban 6 csapat vett részt, és mindegyik csapat mindegyik másikkal pontosan egyszer játszott. Minden győzelemért 3 pont, minden döntetlenért 1 pont és minden vereségért 0 pont járt. Ha a csapatok közül ötnek a végső pontszámai 13, 11, 8, 5 és 0, akkor mennyi lett a hatodik csapat pontszáma?



Megoldás: A 0 pontos csapat öt vereséggel zárt. Emiatt az 5 pontos csapat nyert egyet, így egy győzelem, két döntetlent ért el. A 8 pont csak két győzelem, két döntetlen, egy vereséggel jöhetett ki, míg a 11 pont csak három győzelem, két döntetlennel. A 13 pontos csapat négy győzelmet és egy döntetlent ért el. Emiatt az öt adott csapat összesen 10 győzelem, 7 döntetlen és 8 vereséggel zárt. A hatodik csapat emiatt kettővel többet vesztett, mint nyert, de tudjuk, hogy nyert legalább egyet, mert a 0 pontos csapatot megverte, így csak az lehet, hogy egy győzelem, 1 döntetlen és három vereség lett, azaz négy ponttal zárt a hatodik csapat.

D9. Egy pozitív egész szám *részleteinek* nevezzük a néhány (egy vagy több) egymás utáni számjegy összeolvasásával kapható számokat. Egy szám részletösszegét úgy kapjuk, hogy a benne előforduló összes részletet összeadjuk, beleértve magát a számot is. Például a 2022 részletösszege $2022+202+022+20+02+22+2+0+2+2=2296$. Van egy másik négyjegyű szám is, aminek ugyanennyi a részletösszege. Melyik ez?

Mint a példában is látható: ha egy részlet többször is előfordul a számban, akkor az összegbe minden egyes előfordulása beleszámít, továbbá a 0-val kezdődő részletek is számítanak (a 022 például 22-t ér).

Megoldás: Az $\overline{abcd}$ négyjegyű számnak 10 részletösszege van: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+a+b+c+d=1111a+222b+33c+4d$.

A 2022 részletösszege 2296, így $1111a+222b+33c+4d=2296$ megoldásait keressük, ahol a,b,c,d számjegyek.

Ha $a\geq 3$, akkor az összeg túl sok.

Ha $a=2$ és $b\geq 1$, akkor is túl sok. Ha $a=2$ és $b=0$, akkor $33c+4d=74$. Itt $c\geq 3$ esetén az összeg túl sok, $c=0,1$ esetén pedig nincs jó megoldás d értékére. Ha pedig $c=2$, akkor az $\overline{abcd}=2022$ megoldást kapjuk.

Ha $a=1$ és $b\geq 6$, akkor az összeg túl sok (legalább 2443). Ha $b=5$, akkor $33c+4d=75$. Itt $c\leq 2$, de $c=0,1,2$ egyike sem ad megoldást.

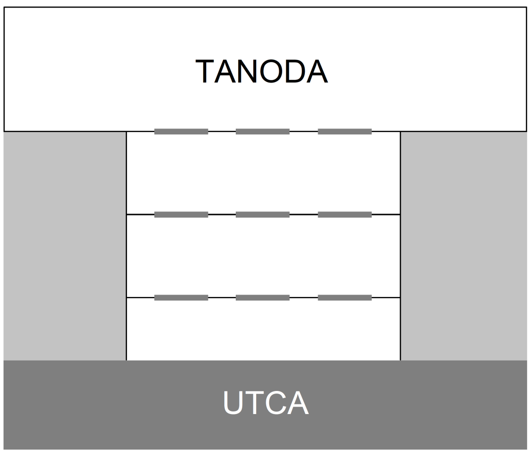
Ha $a=1$ és $b=4$, akkor $33c+4d=297$. Itt $c=9$ és $d=0$ jó megoldást ad. Ha $c=8$, akkor $4d=33$, amire nincs megoldás; ha $c\leq 7$, akkor pedig $33c+4d\leq 7\cdot 33+9\cdot 4=267<297$.

Ha $a=1$ és $b\leq 3$, akkor az összeg legfeljebb $1111+3\cdot 222+9\cdot 33+9\cdot 4=2110<2296$ lehet, így nem kapunk jó megoldást.

Tehát az egyetlen jó megoldás a 2022-n kívül az 1490.

D10. Dürer kacsatanodájába az ábrán látható módon három ajtósor vezet; minden sor három ajtóból áll. Dodó kacsa úgy szeretne bemenni az utcáról a tanodába, hogy mind a kilenc ajtót pontosan egyszer használja. (Az útja során újra kimehet az utcára, illetve a tanodából is kijöhet, csak az számít, hogy az útja végén a tanodába érkezzen.) Hányféleképpen teheti ezt meg?

Két útvonalat különbözőnek tekintünk, ha az ajtókat nem ugyanabban a sorrendben járja végig Dodó.



Megoldás: A lényegesen különböző lehetőségek száma 4. Ezek az alábbiak (a rétegeket az utca felől a tanoda felé haladva A, B, C-vel jelölve):

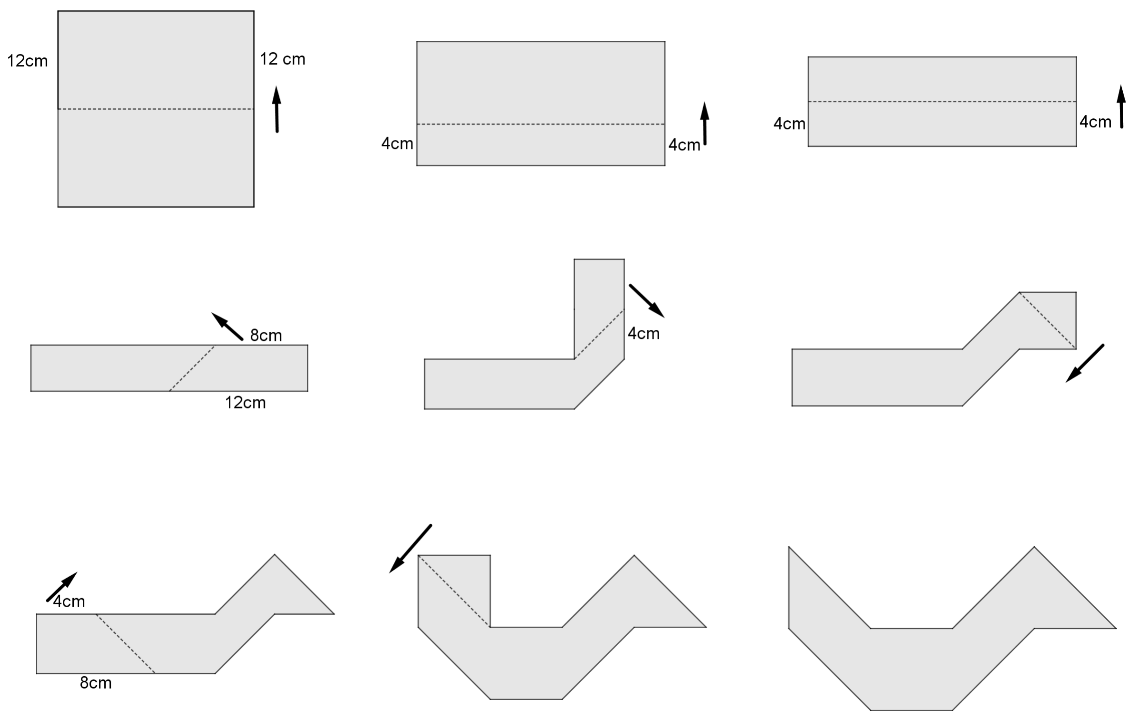
$AAABBBCCC$, $AAABCCBBC$, $ABBAABCCC$, $ABCCBAABC$.

Minden egyes lehetőségben az A jelű ajtókat is $3! = 6$ féle sorrendben járhatjuk végig, valamint a B jelűeket is 6-féleképp és a C jelűeket is, tehát a lehetőségek száma összesen $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 864$.

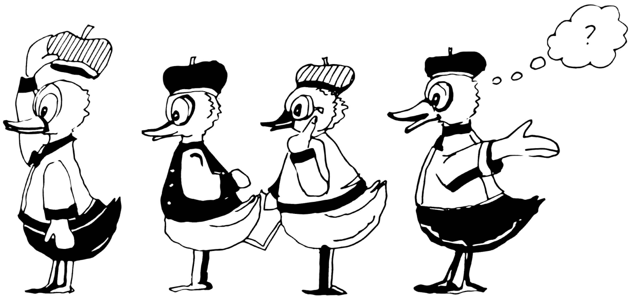
D11. A Kacs Aladár utcában csak az út egyik oldalán találhatóak házak, így az utcán sétálva csak páratlan házszámokat olvashatunk. Az utca páratlan sok telekből áll. A középső három telek Dagobert bácsié, így a három telket elfoglaló villájára a lehetséges három házszám közül csak a legkisebbet rakatta ki. A többi ház számozása hagyományos, és a számozás az 1-estől kezdődik. Mennyi a legnagyobb házszám az utcában, ha a kiírt házszámok összege 3133?

Megoldás: Jelölje a középső házszámot x, ekkor a telkek száma is éppen x. Ha Dagobert bácsi villáján mindhárom házszám fel lenne tüntetve, akkor a házszámok összege így $x \cdot x = x^2$ lenne, azonban az x és $x+2$ házszámok hiányoznak. Így az összeg $x^2 - x - (x+2) = 3133$, vagyis $x^2 - 2x = x(x-2) = 3135$. Innen a $3135 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$ prímtényezős felbontásból kitalálható, hogy $x = 3 \cdot 19 = 57$ és $x - 2 = 5 \cdot 11 = 55$. A legnagyobb házszám tehát $2x - 1 = 113$.

D12. Csongi megtanította Benedeket, hogyan kell kacsát hajtogatni 8 lépésben egy 24 cm $\times$ 24 cm-es papírból. Az ábrákon látható szaggatott egyenes mentén kell a papír egyik felét a másikra hajtani, a nyíl irányában. Miután Benedek meghajtogatta a kacsát, visszacsinált minden lépést, és az így kapott négyzet alakú papírján hajtásvonalakat talált. A lap egyik oldalán kék ceruzával berajzolta azokat a hajtásokat, amik Benedek felé nyíltak, és pirossal azokat, amik az asztal felé nyíltak. Hány cm a különbség a kék vonalak összhossza és a piros vonalak összhossza között?



Megoldás: Figyeljük meg, hogy az első lépésben félbe hajtjuk a papírt, és utána minden hajtás megjelenik a felső és alsó részben is a kihajtogatás után, csak az egyiken piros, másikon kék színnel. Így a második hajtástól minden kiesik, tehát csak az első hajtás számít, azaz a megoldás 24. (Ha nem hiszed, hajtogasd meg.)



D13. Írjatok néhány pozitív egész számot az alábbi táblázatba úgy, hogy:

- minden szám pontosan annyi legyen, mint ahány vele oldalszomszédos mezőben szerepel szám,
- semelyik két oldalszomszédos mezőben nem szerepel azonos szám (oldalszomszédos üres mezők lehetnek).

Mennyi az ezeknek a feltételeknek megfelelő táblázatban a számok összege? *Minden mezőben legfeljebb 1 szám szerepelhet.*

					1
1			3		
		4			2
	2				
					2
1					

Megoldás: Logikai lépések sorozatával megkapható, hogy csak ez az egyetlen lehetőség az ábra kitöltésére:

					1
1		2	**3**	2	3
2	3	**4**	2		**2**
	2	3		1	3
		2			**2**
1	2	3	1		1

Ebben pedig a számok összege 46.

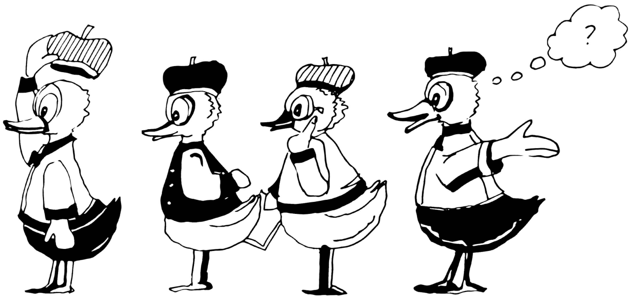
D14. Egy derékszögű háromszög minden oldala cm-ben mérve egész szám, és az átfogó és az egyik befogó hosszának különbsége 75 cm. Legalább hány cm a háromszög kerülete?

Megoldás: Legyenek a háromszög oldalai a, b és $a+75$. A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2=(a+75)^2$. Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy $b^2=150a+75^2=75\cdot(2a+75)=5^2\cdot 3\cdot(2a+75)$, vagyis $2a+75$ egy négyzetszám háromszorosa. Azaz egy olyan páratlan négyzetszámot kell keresni, aminek a háromszorosa nagyobb, mint 75. Ez a négyzetszám a 49 lesz, vagyis $b=105$, $a=36$, a kerület pedig 252.

D15. A pozitív egészekből álló (a,b) számpárra teljesül, hogy a és b egyike sem osztja a másikat, mindkét szám legfeljebb 100, és az ezen feltételeket teljesítő számpárok közül a lehető legtöbb közös osztójuk van. Ekkor legfeljebb mennyi $a\cdot b$ értéke?

Megoldás: Legyen $d=(a,b)$, ekkor a és b közös osztóinak száma megegyezik d osztóinak számával. Ha $a=kd$ és $b=ld$, akkor $k,l\neq 1$ (mivel a és b nem osztják egymást), így k és l közül legalább az egyik legalább 3, vagyis $d\leq 33$. Az 1 és 33 közötti számok közül a legtöbb osztója a 24-nek és a 30-nak van, mindkettőnek 8. Feltehető $a<b$, és a legnagyobb ab értéket $d=24$ esetén a $(72,96)$ párral, $d=30$ esetén pedig a $(60,90)$ párral tudjuk megvalósítani. Ezek közül előbbi a nagyobb, a válasz 6912.

D16. Doofy kacsa mandarinokat vesz a boltban. Mindegyik mandarin ugyanakkora tömegű, és 9, 10, 11, 12 vagy 13 egyenlő tömegű cikkelyre van felosztva, ám a cikkelyek száma megpucolás előtt nem látszik. Legalább hány mandarint kell megvennie Doofy kacsának, hogy biztosan meg tudjon enni pontosan egy mandarinnyi mandarint úgy, hogy csak teljes cikkelyeket eszik, és mindegyik cikkely különböző mandarinból legyen?



Doofy kacsa csak otthon pucolja meg a megvett mandarinokat.

Megoldás: Megállapítható, hogy Doofy a következő módokon állíthat össze egy egész mandarint:

9	10	11	12	13
9	0	0	0	0
0	10	0	0	0
0	0	11	0	0
0	0	0	12	0
0	0	0	0	13
0	5	0	6	0
3	5	0	2	0
3	0	0	8	0
6	0	0	4	0

Nézzük meg legfeljebb hány mandarint vehet ahhoz, hogy ne tudjuk megenni egy egész. Látható, hogy a 11-esből maximum 10-et, a 13-asból maximum 12-t vehetett. Ezután még meg kell vizsgálni, hogy a 9-es, 10-es és 12-es mandarinból hogyan vásárolhatja a legtöbbet úgy, hogy ne lehessen belőle egészet összerakni. Ez pedig úgy lehetséges, ha vesz 8 darab 9 gerezdeset, 9 darab 10 gerezdeset, és 1 darab 12 gerezdeset. Vagyis $8+9+10+1+12+1 = 41$ mandarin megvétele után biztosan összeállítható egy egész mandarin.