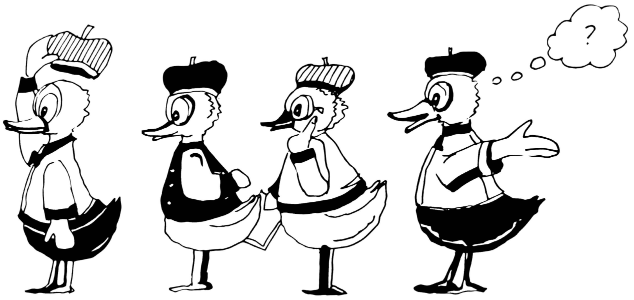
XV. DÜRER VERSENY

Döntő: 2022. február 4-6.

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK



E

KATEGÓRIA

Váltó forduló

9-12. osztályosok

E1. A kacsanyelvben csak **h**, **á** és **p** betűket használnak. A kacsanyelvben nincs olyan szó, melyben két mássalhangzó szerepel egymás után, mert azokat a kacsák nem tudják kiejteni. Azonban a négybetűs szavak közül az összes többi szónak van értelme a kacsanyelvben. Hány értelmes négybetűs szó van a kacsanyelvben? *Az **á** betű magánhangzónak, a **h** és **p** mássalhangzónak számít a kacsanyelvben is.*

Megoldás: Az **áááá** egy szó. Ha van egy mássalhangzó, akkor az négy helyen lehet, és kétféle lehet, így ez 8 opció. Ha két mássalhangzó van, akkor háromféleképpen állhatnak, az első és harmadik, első és negyedik, vagy második és negyedik helyen. A mássalhangzók $2 \cdot 2$-félék lehetnek, így ez 12 opció. Három vagy négy mássalhangzó nem lehet, mert akkor lenne kettő egymás mellett. Így összesen $1+8+12=21$ szó van.

E2. Csaba egy 15 m × 15 m-es négyzet alakú terem közepén áll egy olyan munkahelyen, ahol mindenki gondosan betartja azt a járványügyi előírást, hogy semelyik két ember sem mehet 1,5 m-nél közelebb egymáshoz. Legkevesebb hányan vannak még Csabán kívül a teremben, ha Csaba nem tud egyik falhoz sem eljutni anélkül, hogy a többiek megmozdulnának?

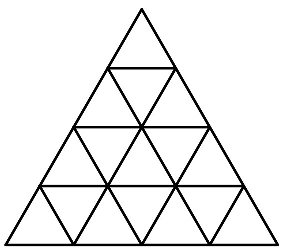
Az embereket pontszerűnek tekintjük.

Megoldás: Ha 3 ember áll egy $2,9$ oldalú szabályos háromszögben, aminek Csaba a középpontja, akkor világos, hogy nem tud elmenni a falig, de tartják az előírásokat. Ha csak két ember van Csabán (C) kívül, A és B, akkor legyen D Csaba vetülete az AB egyenesre. Ekkor a CD egyenesen D-től elfelé sétálva (vagy bármelyik irányban az AB-re merőleges egyenesen ha $C=D$) Csaba távolsága nő A-tól és B-től, így betartják a szabályt, és előbb-utóbb eléri a falat.

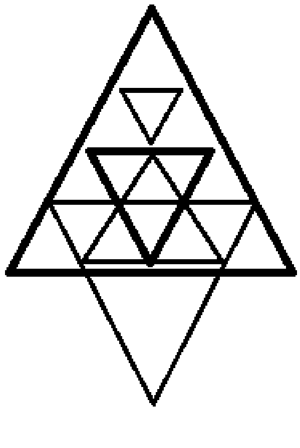
E3. Három kacsalábon forgó palota egyenletesen forog; az első 30, a második 50, a harmadik pedig 70 nap alatt fordul körbe. Ma délben mindhárom palota északra néz. Legközelebb hány nap múlva néznek mind egyszerre délre?

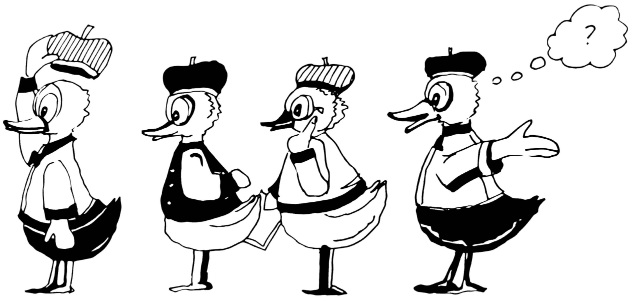
Megoldás: Ha n nap múlva délre néznek, akkor $2n$ nap múlva északra. Ismert, hogy legközelebb a legkisebb közös többszörösük, azaz 1050 nap után fognak újra északra nézni. Emiatt leghamarabb 525 nap után lehet, hogy mind délre néznek, és könnyen látszik, hogy ez valóban megoldás.

E4. Legkevesebb hány szabályos háromszöggel fedhetőek le az alábbi ábra vonalai? (A háromszögeknek csak a kerületét használjuk a fedéshez, és nem muszáj a teljes kerületüknek az ábrára illeszkednie.)



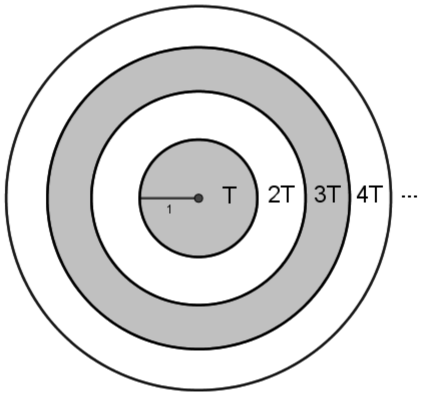
Megoldás: Az ábra 5 háromszöggel lefedhető:





Négy háromszög viszont nem elég a lefedéshez. Minden háromszög legfeljebb 1 vízszintes vonalat fed le, így a 4 vízszintes vonal lefedéséhez minden háromszögnek egy vízszintes vonalat teljesen le kell fednie. Ez mindhárom irányba igaz, vagyis minden lehelyezett háromszög mindhárom irány egy teljes vízszintes vonalát le kell fedje. A leghosszabb, 4 hosszú oldalakat csakis az ábrán látható módon fedhetjük. Ezután még mindegyik 3 hosszú oldalt le kell fednünk, ez további 3 háromszöget igényel. Ekkor azonban a 2 hosszú oldalak még nem lettek lefedve, így szükséges egy további háromszög, vagyis legalább 5.

E5. Benedek koncentrikus köröket rajzol az alábbi módon. Az első kör, amit felrajzol, 1 sugarú. Ezután rajzol egy 2. kört úgy, hogy az 1. és 2. körök közötti körgyűrű területe kétszerese legyen az 1. kör területének. Majd rajzol egy 3. kört úgy, hogy a 2. és 3. körök közötti körgyűrű területe háromszorosa legyen az 1. kör területének. És így tovább (lásd ábra). Melyik az a legkisebb n, melyre az n-edik kör sugara 1-nél nagyobb egész szám lesz?



Megoldás: A kör területképletéből $T = \pi$, így az n. kör területe $\frac{n(n+1)}{2}\pi$, azaz akkor lesz újra egész a sugár, ha $\frac{n(n+1)}{2}$ négyzetszám. Egyszerű végignézni, hogy ez először $n = 8$ esetén teljesül.

E6. A Kacs Aladár utcában csak az út egyik oldalán találhatóak házak, így az utcán sétálva csak páratlan házszámokat olvashatunk. Az utca páratlan sok telekből áll. A középső három telek Dagobert bácsié, így a három telket elfoglaló villájára a lehetséges három házszám közül csak a legkisebbet rakatta ki. A többi ház számozása hagyományos, és a számozás az 1-estől kezdődik. Mennyi a legnagyobb házszám az utcában, ha a kiírt házszámok összege 3133?

Megoldás: Jelölje a középső házszámot x, ekkor a telkek száma is éppen x. Ha Dagobert bácsi villáján mindhárom házszám fel lenne tüntetve, akkor a házszámok összege így $x \cdot x = x^2$ lenne, azonban az x és $x+2$ házszámok hiányoznak. Így az összeg $x^2-x-(x+2) = 3133$, vagyis $x^2-2x = x(x-2) = 3135$. Innen a $3135 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$ prímtényezős felbontásból kitalálható, hogy $x = 3 \cdot 19 = 57$ és $x - 2 = 5 \cdot 11 = 55$. A legnagyobb házszám tehát $2x - 1 = 113$.

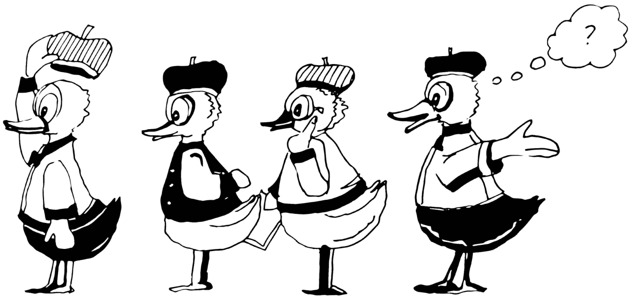
E7. Egy pozitív egész szám *részleteinek* nevezzük a néhány (egy vagy több) egymás utáni számjegy összeolvasásával kapható számokat. Egy szám részletösszegét úgy kapjuk, hogy a benne előforduló összes részletet összeadjuk, beleértve magát a számot is. Például a 2022 részletösszege $2022 + 202 + 022 + 20 + 02 + 22 + 2 + 0 + 2 + 2 = 2296$. Van egy másik négyjegyű szám is, aminek ugyanennyi a részletösszege. Melyik ez?

Mint a példában is látható: ha egy részlet többször is előfordul a számban, akkor az összegbe minden egyes előfordulása beleszámít, továbbá a 0-val kezdődő részletek is számítanak (a 022 például 22-t ér).

Megoldás: Az $\overline{abcd}$ négyjegyű számnak 10 részletösszege van: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+a+b+c+d = 1111a + 222b + 33c + 4d$.

A 2022 részletösszege 2296, így $1111a + 222b + 33c + 4d = 2296$ megoldásait keressük, ahol a, b, c, d számjegyek.

Ha $a \geq 3$, akkor az összeg túl sok.



Ha $a = 2$ és $b \geq 1$, akkor is túl sok. Ha $a = 2$ és $b = 0$, akkor $33c + 4d = 74$. Itt $c \geq 3$ esetén az összeg túl sok, $c = 0, 1$ esetén pedig nincs jó megoldás d értékére. Ha pedig $c = 2$, akkor az $\overline{abcd} = 2022$ megoldást kapjuk.

Ha $a = 1$ és $b \geq 6$, akkor az összeg túl sok (legalább 2443). Ha $b = 5$, akkor $33c + 4d = 75$. Itt $c \leq 2$, de $c = 0, 1, 2$ egyike sem ad megoldást.

Ha $a = 1$ és $b = 4$, akkor $33c + 4d = 297$. Itt $c = 9$ és $d = 0$ jó megoldást ad. Ha $c = 8$, akkor $4d = 33$, amire nincs megoldás; ha $c \leq 7$, akkor pedig $33c + 4d \leq 7 \cdot 33 + 9 \cdot 4 = 267 < 297$.

Ha $a = 1$ és $b \leq 3$, akkor az összeg legfeljebb $1111 + 3 \cdot 222 + 9 \cdot 33 + 9 \cdot 4 = 2110 < 2296$ lehet, így nem kapunk jó megoldást.

Tehát az egyetlen jó megoldás a 2022-n kívül az 1490.

E8. Albrecht három kedvenc számának a szorzata 2022, és ha mindhárom számhoz hozzáadunk egyet, akkor a szorzatuk 1514 lesz. Mennyi a három szám négyzeteinek összege, ha a három szám összege 0?

Megoldás: Legyen Albrecht három kedvenc száma a, b és c. Ekkor $abc = 2022$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 1514$ és $a + b + c = 0$.

$$1514 = (a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 2023 + ab + ac + bc,$$

így $ab + ac + bc = -509$. Emiatt

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0 + 2 \cdot 509 = 1018.$$

E9. Egy derékszögű háromszög minden oldala cm-ben mérve egész szám, és az átfogó és az egyik befogó hosszának különbsége 75 cm. Legalább hány cm a háromszög kerülete?

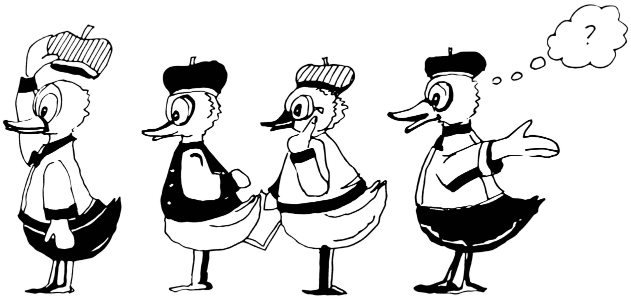
Megoldás: Legyenek a háromszög oldalai a, b és $a+75$. A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2 = (a+75)^2$. Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy $b^2 = 150a + 75^2 = 75 \cdot (2a + 75) = 5^2 \cdot 3 \cdot (2a + 75)$, vagyis $2a + 75$ egy négyzetszám háromszorosa. Azaz egy olyan páratlan négyzetszámot kell keresni, aminek a háromszorosa nagyobb, mint 75. Ez a négyzetszám a 49 lesz, vagyis $b = 105$, $a = 36$, a kerület pedig 252.

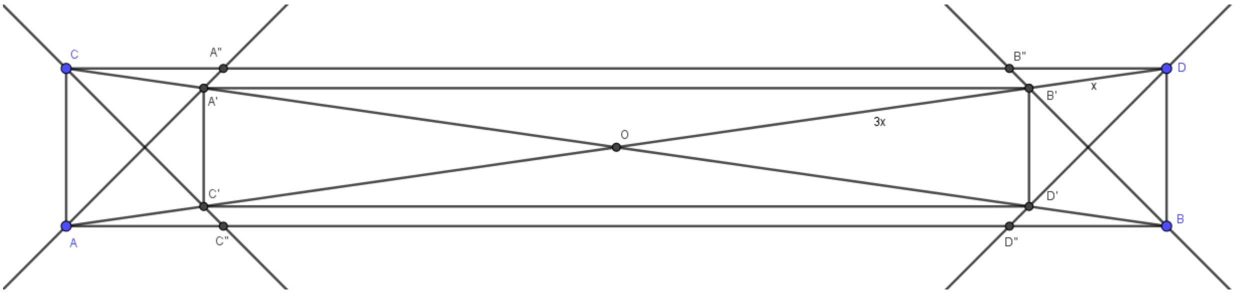
E10. A pozitív egészekből álló (a, b) számpárra teljesül, hogy a és b egyike sem osztja a másikat, mindkét szám legfeljebb 100, és az ezen feltételeket teljesítő számpárok közül a lehető legtöbb közös osztójuk van. Ekkor legfeljebb mennyi $a \cdot b$ értéke?

Megoldás: Legyen $d = (a, b)$, ekkor a és b közös osztóinak száma megegyezik d osztóinak számával. Ha $a = kd$ és $b = ld$, akkor $k, l \neq 1$ (mivel a és b nem osztják egymást), így k és l közül legalább az egyik legalább 3, vagyis $d \leq 33$. Az 1 és 33 közötti számok közül a legtöbb osztója a 24-nek és a 30-nak van, mindkettőnek 8. Feltehető $a < b$, és a legnagyobb ab értéket $d = 24$ esetén a $(72, 96)$ párral, $d = 30$ esetén pedig a $(60, 90)$ párral tudjuk megvalósítani. Ezek közül előbbi a nagyobb, a válasz 6912.

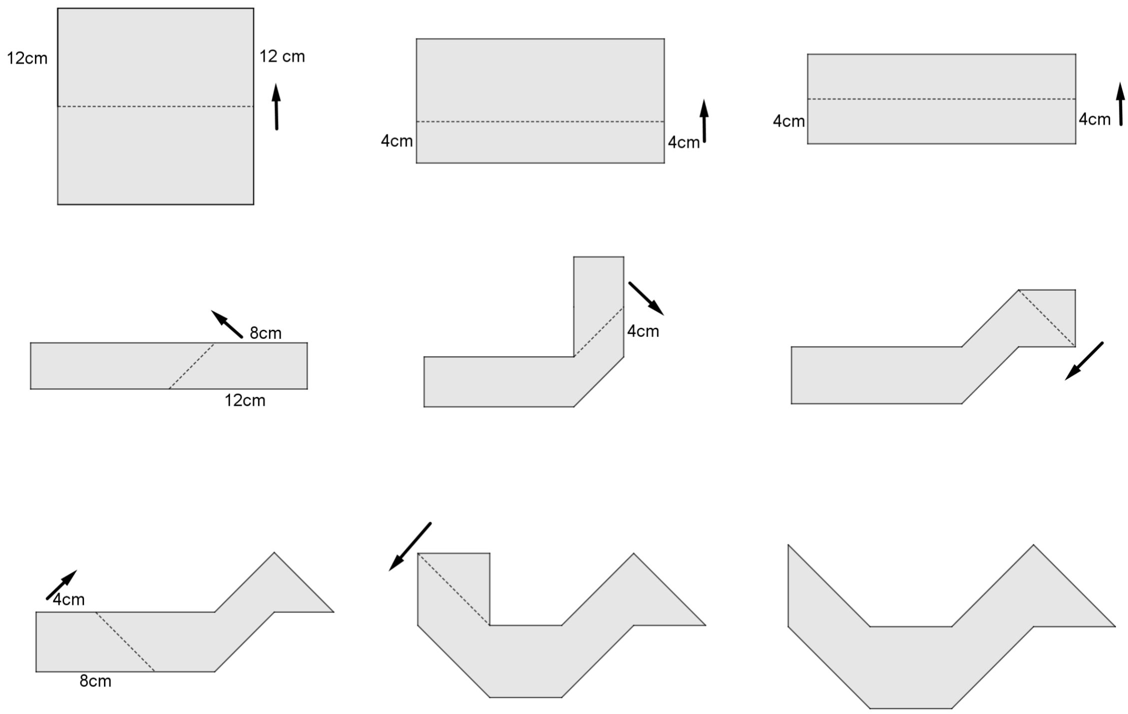
E11. Az $ABCD$ téglalapban az AC átlót a B-ből induló szögfelező B'-ben, a D-ből induló szögfelező D'-ben, míg a BD átlót az A-ból induló szögfelező A'-ben, a C-ből induló szögfelező C'-ben metszi. Az $A'B'C'D'$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének $\frac{9}{16}$-a. Hányszor hosszabb az $ABCD$ téglalap hosszabb oldala a rövidebb oldalánál?

Megoldás: Legyen AA' egyenesnek és CD oldalnak a metszéspontja A'', és hasonló módon (az ábra szerint) definiáljuk a B'', C'' és D'' pontokat is. Ekkor ha $x = DB'$, akkor a területarány miatt $B'O = 3x$ (O a középpont), és így $DB' : B'A = 1 : 7$. Ekkor $DB''B'$ és ABB' háromszögek hasonlók, és a hasonlósági arány $1 : 7$, de ez éppen megegyezik a $B''D : AB = DB : AB$ aránnyal. Tehát a válasz 7.





E12. Csongi megtanította Benedeket, hogyan kell kacsát hajtogatni 8 lépésben egy 24 cm × 24 cm-es papírból. Az ábrákon látható szaggatott egyenes mentén kell a papír egyik felét a másikra hajtani, a nyíl irányában. Miután Benedek meghajtogatta a kacsát, visszacsinált minden lépést, és az így kapott négyzet alakú papírján hajtásvonalakat talált. A lap egyik oldalán kék ceruzával berajzolta azokat a hajtásokat, amik Benedek felé nyíltak, és pirossal azokat, amik az asztal felé nyíltak. Hány cm a különbség a kék vonalak összhossza és a piros vonalak összhossza között?

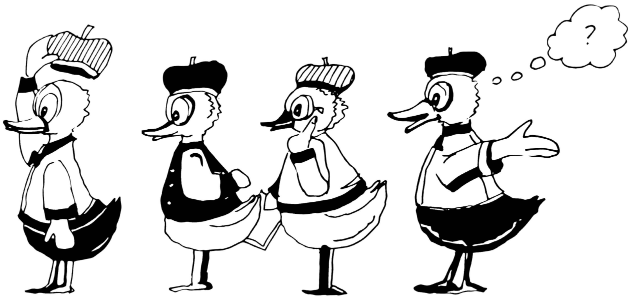


Megoldás: Figyeljük meg, hogy az első lépésben félbe hajtjuk a papírt, és utána minden hajtás megjelenik a felső és alsó részben is a kihajtogatás után, csak az egyiken piros, másikon kék színnel. Így a második hajtástól minden kiesik, tehát csak az első hajtás számít, azaz a megoldás 24. (Ha nem hiszed, hajtogasd meg.)

E13. Írjatok néhány pozitív egész számot az alábbi táblázatba úgy, hogy:

- minden szám pontosan annyi legyen, mint ahány vele oldalszomszédos mezőben szerepel szám,
- semelyik két oldalszomszédos mezőben nem szerepel azonos szám (oldalszomszédos üres mezők lehetnek).

Mennyi az ezeknek a feltételeknek megfelelő táblázatban a számok összege? *Minden mezőben legfeljebb 1 szám szerepelhet.*



					1
1			3		
		4			2
	2				
					2
1					

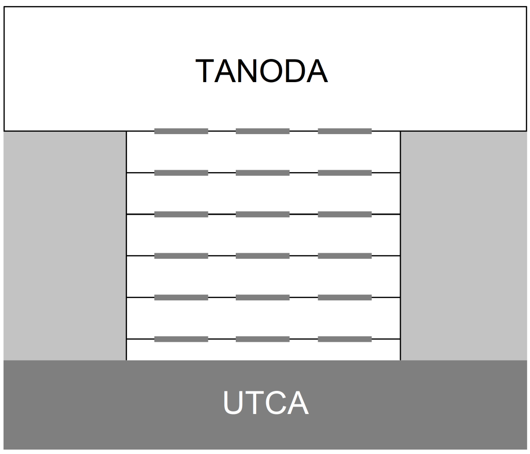
Megoldás: Logikai lépések sorozatával megkapható, hogy csak ez az egyetlen lehetőség az ábra kitöltésére:

					1
1		2	**3**	2	3
2	3	**4**	2		**2**
	2	3		1	3
		2			**2**
1	2	3	1		1

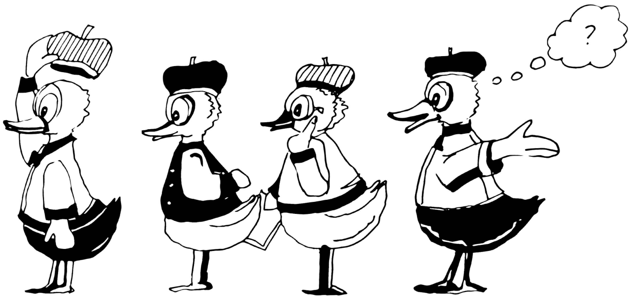
Ebben pedig a számok összege 46.

E14. Dürer kacsatanodájába az ábrán látható módon hat ajtósor vezet; minden sor három ajtóból áll. Dodó kacsa úgy szeretne bemenni az utcáról a tanodába, hogy mind a 18 ajtót pontosan egyszer használja. (Az útja során újra kimehet az utcára, illetve a tanodából is kijöhet, csak az számít, hogy az útja végén a tanodába érkezzen.) Hányféleképpen teheti ezt meg? **Válaszként a lehetséges útvonalak számának utolsó 4 jegyét adjátok meg.**

Két útvonalat különbözőnek tekintünk, ha az ajtókat nem ugyanabban a sorrendben járja végig Dodó.



Megoldás: Jelöljük a feladatnak annak a változatára, amikor k ajtósor van (minden sorban 3 ajtó), a lényegesen különböző megoldások számát t_k-val. Itt lényegesen különböző alatt azt értjük, hogy az egy ajtósorban lévő ajtókat nem különböztetjük meg egymástól.



Ekkor ha az első visszafordulás előtt i ajtón megyünk át, akkor ezután muszáj i ajtón visszafelé, majd i ajtón ismét előrefelé átmennünk, és ilyen módon a $k-i$ ajtósoros problémára jutunk. Itt i értéke haladhat 1-től k-ig, vagyis $t_k = t_{k-1} + t_{k-2} + \ldots + t_1 + t_0$. Ez alapján a feladat rekurzióval megoldható, $t_0 = t_1 = 1$ és minden $k \geq 2$-re $t_k = 2^{k-1}$.

Minden ajtósor három ajtóján 6-féle sorrendben haladhatunk át, vagyis az alapfeladatra k ajtósor esetén $6^k \cdot 2^{k-1}$ a válasz. Ha $k = 6$, akkor ez 1492992.

E15. Doofy kacsa mandarinokat vesz a boltban. Mindegyik mandarin ugyanakkora tömegű, és 9, 10, 11, 12 vagy 13 egyenlő tömegű cikkelyre van felosztva, ám a cikkelyek száma megpucolás előtt nem látszik. Legalább hány mandarint kell megvennie Doofy kacsának, hogy biztosan meg tudjon enni pontosan egy mandarinnyi mandarint úgy, hogy csak teljes cikkelyeket eszik, és mindegyik cikkely különböző mandarinból legyen?

Doofy kacsa csak otthon pucolja meg a megvett mandarinokat.

Megoldás: Megállapítható, hogy Doofy a következő módokon állíthat össze egy egész mandarint:

9	10	11	12	13
9	0	0	0	0
0	10	0	0	0
0	0	11	0	0
0	0	0	12	0
0	0	0	0	13
0	5	0	6	0
3	5	0	2	0
3	0	0	8	0
6	0	0	4	0

Nézzük meg legfeljebb hány mandarint vehet ahhoz, hogy ne tudjuk megenni egy egész. Látható, hogy a 11-esből maximum 10-et, a 13-asból maximum 12-t vehetett. Ezután még meg kell vizsgálni, hogy a 9-es, 10-es és 12-es mandarinból hogyan vásárolhatja a legtöbbet úgy, hogy ne lehessen belőle egészet összerakni. Ez pedig úgy lehetséges, ha vesz 8 darab 9 gerezdeset, 9 darab 10 gerezdeset, és 1 darab 12 gerezdeset. Vagyis $8+9+10+1+12+1 = 41$ mandarin megvétele után biztosan összeállítható egy egész mandarin.

E16. Egy táblán a 60-as szám szerepel. Minden lépésben Andris egyesével letörli a lépés elején a táblán lévő számokat, és mindegyiknek a helyére felírja az összes osztóját (beleértve önmagát is). 10 ilyen lépés után hányszor fog szerepelni az 1-es szám a táblán?

Megoldás: Nevezzünk osztóláncnak egy $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{10}$ sorozatot, ha $d_0 = 60$, $d_{10} = 1$ és minden i-re $d_{i+1} \mid d_i$. A feladatban az a kérdés, hogy hány ilyen osztólánc létezik. Ehhez elég megszámolni, hogy a $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$-nek melyik tényezőit mely lépésben "veszítjük" el a 10 közül. A 3-as tényezőt 10 helyen veszíthetjük el, ettől függetlenül az 5-ös tényezőt szintén 10 helyen, a két 2-es elveszítésére pedig $10 + \binom{10}{2} = 55$ lehetőség van (10 eset van arra, hogy egy lépésben, és $\binom{10}{2}$ eset van arra, hogy két lépésben veszítjük el őket). A lehetőségek száma összesen $10 \cdot 10 \cdot 55 = 5500$.