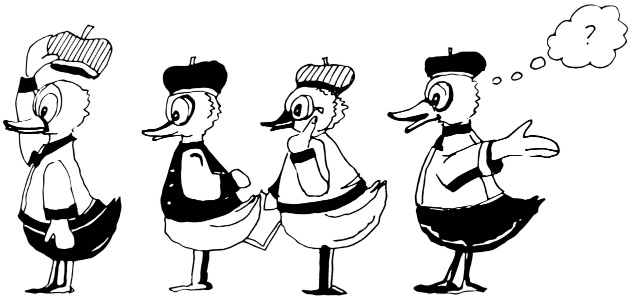
XV. DÜRER VERSENY

Döntő:
2022. február 4-6.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



E+

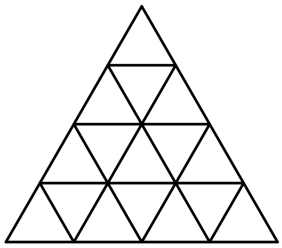
KATEGÓRIA
Váltó forduló

9-12.
osztályosok

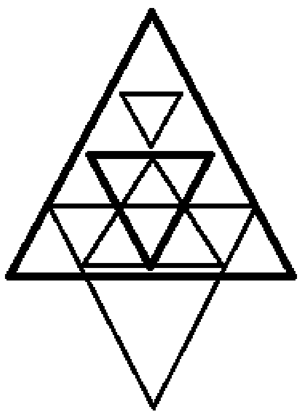
E+1. Hány olyan tízjegyű számjegysorozat van, ami 1 db 4-es, 2 db 3-as, 3 db 2-es és 4 db 1-es számjegyből áll, továbbá bármely két 1-es között van egy 2-es, bármely két 2-es között van egy 3-as, és a két 3-as között van egy 4-es?

Megoldás: Először rakjuk le a négy 1-est. Ezután rakjuk be a 2-eseket, ekkor 1212121 a sorozat. Majd a 3-asokat négyféleképpen lehet lehelyezni, mert mindkettőt lehet az egyes egyik vagy másik oldalára rakni. Nézzük meg, hogy a 4 esetben a 4-est hova rakhatjuk. Ez könnyen látszik, hogy 4, 3, 3 és 2 eset, így a lehetőségek száma $4 + 3 + 3 + 2 = 12$.

E+2. Legkevesebb hány szabályos háromszöggel fedhetőek le az alábbi ábra vonalai? (A háromszögeknek csak a kerületét használjuk a fedéshez, és nem muszáj a teljes kerületüknek az ábrára illeszkednie.)



Megoldás: Az ábra 5 háromszöggel lefedhető:

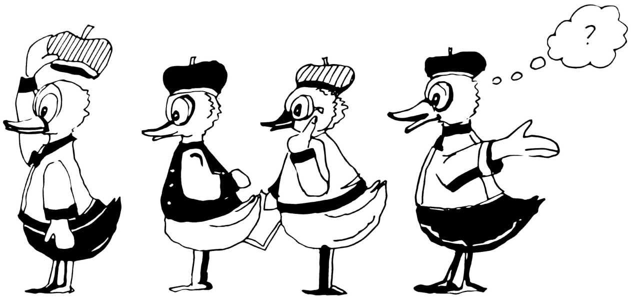


Négy háromszög viszont nem elég a lefedéshez. Minden háromszög legfeljebb 1 vízszintes vonalat fed le, így a 4 vízszintes vonal lefedéséhez minden háromszögnek egy vízszintes vonalat teljesen le kell fednie. Ez mindhárom irányba igaz, vagyis minden lehelyezett háromszög mindhárom irány egy teljes vízszintes vonalát le kell fedje. A leghosszabb, 4 hosszú oldalakat csakis az ábrán látható módon fedhetjük. Ezután még mindegyik 3 hosszú oldalt le kell fednünk, ez további 3 háromszöget igényel. Ekkor azonban a 2 hosszú oldalak még nem lettek lefedve, így szükséges egy további háromszög, vagyis legalább 5.

E+3. Három kacsalábon forgó palota egyenletesen forog; az első 30, a második 50, a harmadik pedig 70 nap alatt fordul körbe. Ma délben mindhárom palota északra néz. Legközelebb hány nap múlva néznek mind egyszerre délre?

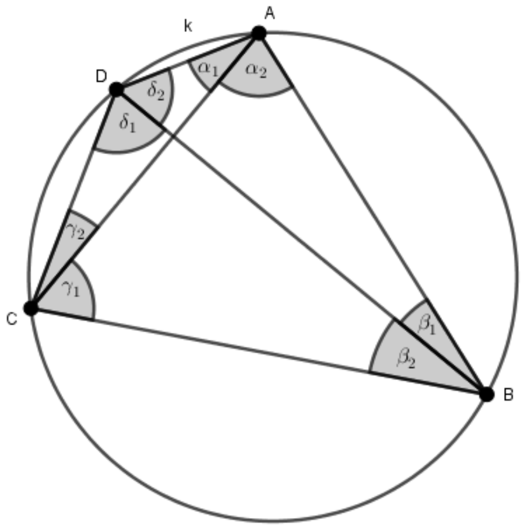
Megoldás: Ha n nap múlva délre néznek, akkor $2n$ nap múlva északra. Ismert, hogy legközelebb a legkisebb közös többszörösük, azaz 1050 nap után fognak újra északra nézni. Emiatt leghamarabb 525 nap után lehet, hogy mind délre néznek, és könnyen látszik, hogy ez valóban megoldás.

E+4. A Kacs Aladár utcában csak az út egyik oldalán találhatóak házak, így az utcán sétálva csak páratlan házszámokat olvashatunk. Az utca páratlan sok telekből áll. A középső három telek Dagobert bácsié, így a három telket elfoglaló villájára a lehetséges három házszám közül csak a legkisebbet rakatta ki. A többi ház számozása hagyományos, és a számozás az 1-estől kezdődik. Mennyi a legnagyobb házszám az utcában, ha a kiírt házszámok összege 3133?



Megoldás: Jelölje a középső házszámot x, ekkor a telkek száma is éppen x. Ha Dagobert bácsi villáján mindhárom házszám fel lenne tüntetve, akkor a házszámok összege így $x \cdot x = x^2$ lenne, azonban az x és $x+2$ házszámok hiányoznak. Így az összeg $x^2 - x - (x+2) = 3133$, vagyis $x^2 - 2x = x(x-2) = 3135$. Innen a $3135 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$ prímtényezős felbontásból kitalálható, hogy $x = 3 \cdot 19 = 57$ és $x - 2 = 5 \cdot 11 = 55$. A legnagyobb házszám tehát $2x - 1 = 113$.

E+5. Egy k körön kijelöltünk négy pontot (A, B, C, D) és berajzoltuk az őket páronként összekötő szakaszokat. A szögeket az ábrán látható módon jelöltük. Tudjuk, hogy $\alpha_1 : \alpha_2 = 2 : 5$, valamint $\beta_1 : \beta_2 = 7 : 11$ és $\gamma_1 : \gamma_2 = 10 : 3$. Ha $\delta_1 : \delta_2 = p : q$, ahol p és q relatív prím pozitív egészek, akkor mennyi p értéke?



Megoldás: Vegyük észre az ábrán, hogy $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = \delta_1$, $\beta_1 = \gamma_2$ és $\gamma_1 = \delta_2$. Tehát $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$, vagyis $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1$. Ezek alapján $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{33}{28}$. Így a megoldás 33.

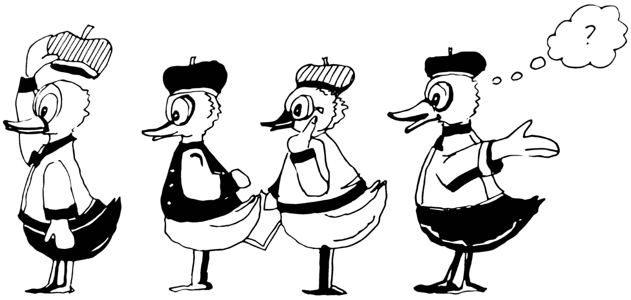
E+6. Egy derékszögű háromszög minden oldala cm-ben mérve egész szám, és az átfogó és az egyik befogó hosszának különbsége 75 cm. Legalább hány cm a háromszög kerülete?

Megoldás: Legyenek a háromszög oldalai a, b és $a+75$. A Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = (a+75)^2$. Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy $b^2 = 150a + 75^2 = 75 \cdot (2a + 75) = 5^2 \cdot 3 \cdot (2a + 75)$, vagyis $2a + 75$ egy négyzetszám háromszorosa. Azaz egy olyan páratlan négyzetszámot kell keresni, aminek a háromszorosa nagyobb, mint 75. Ez a négyzetszám a 49 lesz, vagyis $b = 105$, $a = 36$, a kerület pedig 252.

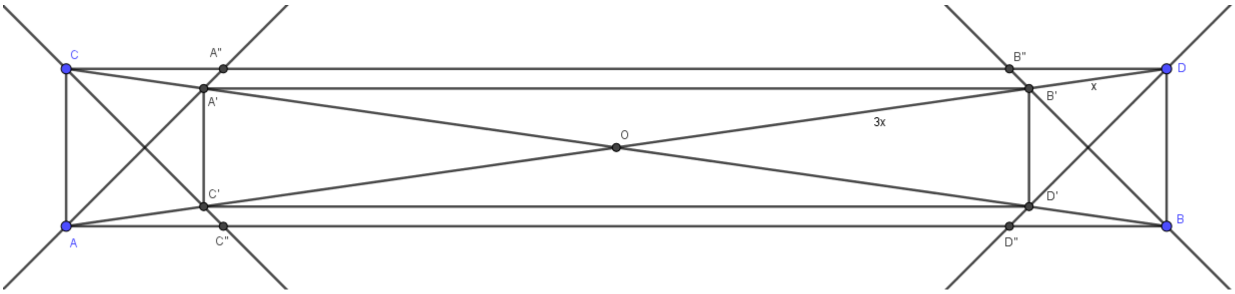
E+7. A pozitív egészekből álló (a, b) számpárra teljesül, hogy a és b egyike sem osztja a másikat, mindkét szám legfeljebb 100, és az ezen feltételeket teljesítő számpárok közül a lehető legtöbb közös osztójuk van. Ekkor legfeljebb mennyi $a \cdot b$ értéke?

Megoldás: Legyen $d = (a, b)$, ekkor a és b közös osztóinak száma megegyezik d osztóinak számával. Ha $a = kd$ és $b = ld$, akkor $k, l \neq 1$ (mivel a és b nem osztják egymást), így k és l közül legalább az egyik legalább 3, vagyis $d \leq 33$. Az 1 és 33 közötti számok közül a legtöbb osztója a 24-nek és a 30-nak van, mindkettőnek 8. Feltehető $a < b$, és a legnagyobb ab értéket $d = 24$ esetén a $(72, 96)$ párral, $d = 30$ esetén pedig a $(60, 90)$ párral tudjuk megvalósítani. Ezek közül előbbi a nagyobb, a válasz 6912.

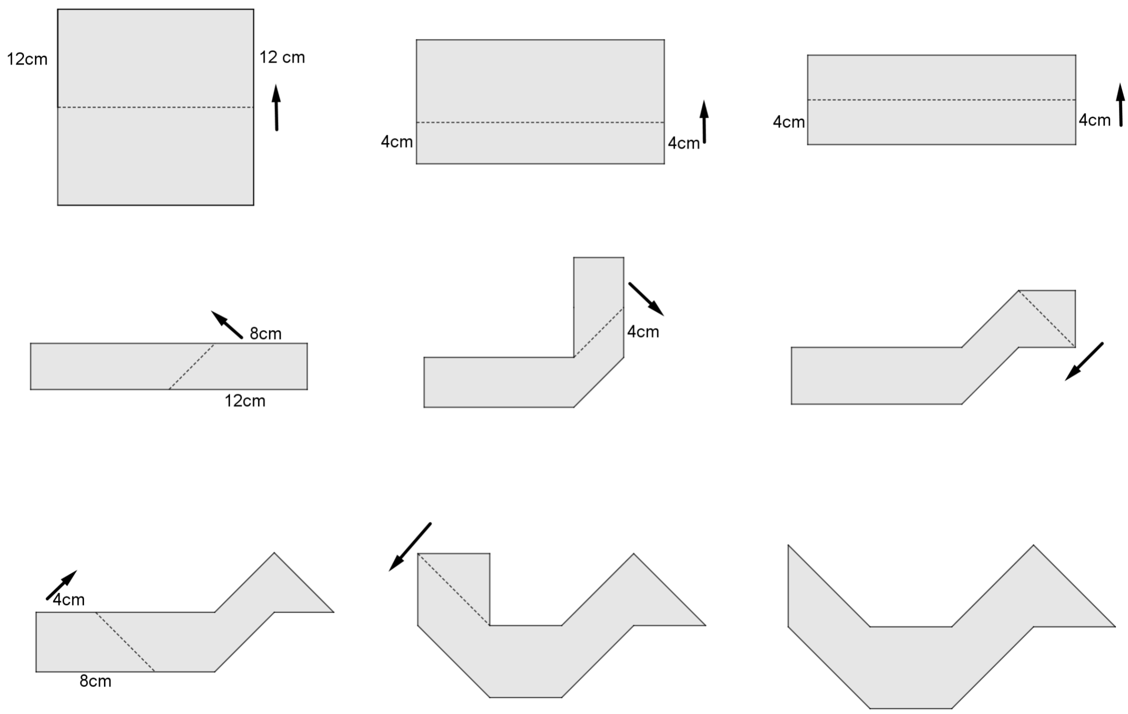
E+8. Az $ABCD$ téglalapban az AC átlót a B-ből induló szögfelező B'-ben, a D-ből induló szögfelező D'-ben, míg a BD átlót az A-ból induló szögfelező A'-ben, a C-ből induló szögfelező C'-ben metszi. Az $A'B'C'D'$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének $\frac{9}{16}$-a. Hányszor hosszabb az $ABCD$ téglalap hosszabb oldala a rövidebb oldalánál?



Megoldás: Legyen AA' egyenesnek és CD oldalnak a metszéspontja A'', és hasonló módon (az ábra szerint) definiáljuk a B'', C'' és D'' pontokat is. Ekkor ha $x = DB'$, akkor a területarány miatt $B'O = 3x$ (O a középpont), és így $DB' : B'A = 1 : 7$. Ekkor $DB''B'$ és ABB' háromszögek hasonlók, és a hasonlósági arány $1 : 7$, de ez éppen megegyezik a $B''D : AB = DB : AB$ aránnyal. Tehát a válasz 7.

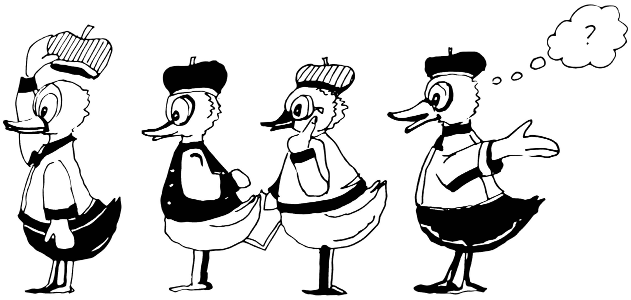


E+9. Csongi megtanította Benedeket, hogyan kell kacsát hajtogatni 8 lépésben egy 24 cm × 24 cm-es papírból. Az ábrákon látható szaggatott egyenes mentén kell a papír egyik felét a másikra hajtani, a nyíl irányában. Miután Benedek meghajtogatta a kacsát, visszacsinált minden lépést, és az így kapott négyzet alakú papírján hajtásvonalakat talált. A lap egyik oldalán kék ceruzával berajzolta azokat a hajtásokat, amik Benedek felé nyíltak, és pirossal azokat, amik az asztal felé nyíltak. Hány cm a különbség a kék vonalak összhossza és a piros vonalak összhossza között?



Megoldás: Figyeljük meg, hogy az első lépésben félbe hajtjuk a papírt, és utána minden hajtás megjelenik a felső és alsó részben is a kihajtogatás után, csak az egyiken piros, másikon kék színnel. Így a második hajtástól minden kiesik, tehát csak az első hajtás számít, azaz a megoldás 24. (Ha nem hiszed, hajtogasd meg.)

E+10. Írjatok néhány pozitív egész számot az alábbi táblázatba úgy, hogy:



- minden szám pontosan annyi legyen, mint ahány vele oldalszomszédos mezőben szerepel szám,
- semelyik két oldalszomszédos mezőben nem szerepel azonos szám (oldalszomszédos üres mezők lehetnek).

Mennyi az ezeknek a feltételeknek megfelelő táblázatban a számok összege? *Minden mezőben legfeljebb 1 szám szerepelhet.*

					1
1			3		
		4			2
	2				
					2
1					

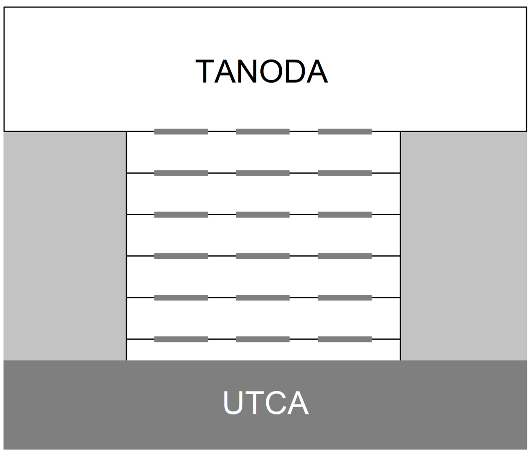
Megoldás: Logikai lépések sorozatával megkapható, hogy csak ez az egyetlen lehetőség az ábra kitöltésére:

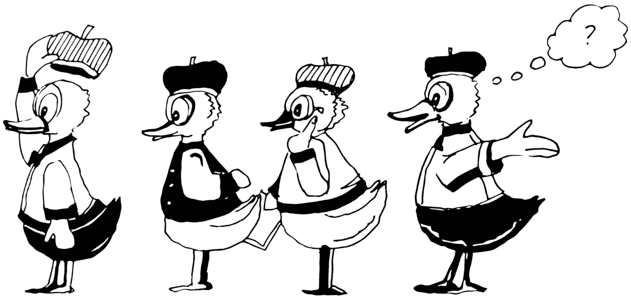
					1
1		2	**3**	2	3
2	3	**4**	2		**2**
	2	3		1	3
		2			**2**
1	2	3	1		1

Ebben pedig a számok összege 46.

E+11. Dürer kacsatanodájába az ábrán látható módon hat ajtósor vezet; minden sor három ajtóból áll. Dodó kacsa úgy szeretne bemenni az utcáról a tanodába, hogy mind a 18 ajtót pontosan egyszer használja. (Az útja során újra kimehet az utcára, illetve a tanodából is kijöhet, csak az számít, hogy az útja végén a tanodába érkezzen.) Hányféleképpen teheti ezt meg? **Válaszként a lehetséges útvonalak számának utolsó 4 jegyét adjátok meg.**

Két útvonalat különbözőnek tekintünk, ha az ajtókat nem ugyanabban a sorrendben járja végig Dodó.





Megoldás: Jelöljük a feladatnak annak a változatára, amikor k ajtósor van (minden sorban 3 ajtó), a lényegesen különböző megoldások számát t_k-val. Itt lényegesen különböző alatt azt értjük, hogy az egy ajtósorban lévő ajtókat nem különböztetjük meg egymástól.

Ekkor ha az első visszafordulás előtt i ajtón megyünk át, akkor ezután muszáj i ajtón visszafelé, majd i ajtón ismét előrefelé átmennünk, és ilyen módon a $k-i$ ajtósoros problémára jutunk. Itt i értéke haladhat 1-től k-ig, vagyis $t_k = t_{k-1} + t_{k-2} + \ldots + t_1 + t_0$. Ez alapján a feladat rekurzióval megoldható, $t_0 = t_1 = 1$ és minden $k \geq 2$-re $t_k = 2^{k-1}$.

Minden ajtósor három ajtóján 6-féle sorrendben haladhatunk át, vagyis az alapfeladatra k ajtósor esetén $6^k \cdot 2^{k-1}$ a válasz. Ha $k = 6$, akkor ez 1492992.

E+12. Doofy kacsa mandarinokat vesz a boltban. Mindegyik mandarin ugyanakkora tömegű, és 9, 10, 11, 12 vagy 13 egyenlő tömegű cikkelyre van felosztva, ám a cikkelyek száma megpucolás előtt nem látszik. Legalább hány mandarint kell megvennie Doofy kacsának, hogy biztosan meg tudjon enni pontosan egy mandarinnyi mandarint úgy, hogy csak teljes cikkelyeket eszik, és mindegyik cikkely különböző mandarinból legyen?

Doofy kacsa csak otthon pucolja meg a megvett mandarinokat.

Megoldás: Megállapítható, hogy Doofy a következő módokon állíthat össze egy egész mandarint:

9	10	11	12	13
9	0	0	0	0
0	10	0	0	0
0	0	11	0	0
0	0	0	12	0
0	0	0	0	13
0	5	0	6	0
3	5	0	2	0
3	0	0	8	0
6	0	0	4	0

Nézzük meg legfeljebb hány mandarint vehet ahhoz, hogy ne tudjuk megenni egy egész. Látható, hogy a 11-esből maximum 10-et, a 13-asból maximum 12-t vehetett. Ezután még meg kell vizsgálni, hogy a 9-es, 10-es és 12-es mandarinból hogyan vásárolhatja a legtöbbet úgy, hogy ne lehessen belőle egészet összerakni. Ez pedig úgy lehetséges, ha vesz 8 darab 9 gerezdeset, 9 darab 10 gerezdeset, és 1 darab 12 gerezdeset. Vagyis $8+9+10+1+12+1 = 41$ mandarin megvétele után biztosan összeállítható egy egész mandarin.

E+13. Adott egy 10 sugarú k_1 kör, mely kívülről érinti a 18 sugarú k_2 kört. A k_3 kör mindkét kört érinti, továbbá érinti a középpontjaik által meghatározott e egyenest. Legyen k_4 az a (k_1-től különböző) kör, melynek középpontja illeszkedik az e egyenesre és kívülről érinti a k_2 és k_3 köröket. Hány egység a k_4 kör sugara?

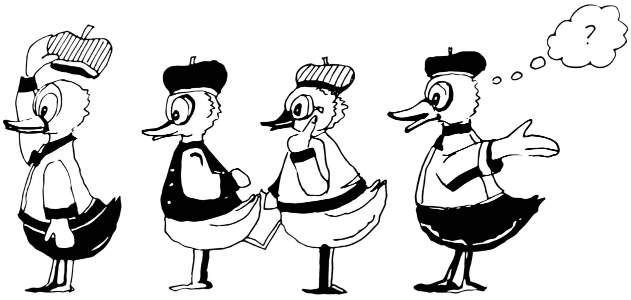
Megoldás: Legyen k_3 sugara R, legyen k_3-nak és e-nek a közös pontja (T) és k_1 kör távolsága t, illetve legyen k_4 kör sugara r.

Ha k_n középpontja O_n ($n = 1, 2, 3, 4$), akkor Pitegorasz-tételeket felírva a TO_3O_1, TO_3O_2 és TO_3O_4 háromszögekre három egyenletet kapunk három ismeretlenre (R, t, r). Ezek könnyen megfejthetőek megfelelő egyenletrendezéssel és a másodfokú egyenlet megoldóképletét használva. A válasz $r = 42$.

E+14. Benedek írt egy programot, amely kiszámolta az alábbi összeget: $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 2021^{2021}$. Mennyi az összeg 35-tel való osztási maradéka?

Megoldás: Elegendő az összeg 5-ös és 7-es maradékát kiszámítani a kínai maradéktétel miatt.

Modulo 5, $1^4 \equiv 2^4 \equiv 3^4 \equiv 4^4 \equiv 1$. Tehát $1^1+6^6+11^{11}+16^{16} \equiv 1+1+1+1 \equiv 4$, $2^2+7^7+12^{12}+17^{17} \equiv 2^2+2^3+2^0+2^1 \equiv 4+3+1+2 \equiv 0$, $3^3+8^8+13^{13}+18^{18} \equiv 3^3+3^0+3^1+3^2 \equiv 2+1+3+4 \equiv 0$, $4^4+9^9+14^{14}+19^{19} \equiv (-1)^0+(-1)^1+(-1)^0+(-1)^1 \equiv 0$.



Összességében tehát az első 20 tag összege 4 mod 5.

Minden 5-höz relatív prím x-re $(x+20)^{x+20} \equiv (x+20)^x \cdot 1 \equiv x^x \pmod 5$, tehát 20-as blokkonként 4 az összeg mod 5. Ilyen blokkból $2020/20 = 101$ darab van, melyek összege -1 lesz mod 5. Így a teljes összeg kongruens $-1 + 2021^{2021} \equiv 0$-val mod 5.

Hasonló megfontolásokból minden 42-es blokkban a tagok összege $6 \equiv -1$ mod 7, és $2021 = 48 \cdot 42 + 5$, ezért a teljes összeg $48 \cdot (-1) + 2017^{2017} + 2018^{2018} + 2019^{2019} + 2020^{2020} + 2021^{2021} \equiv 1 + 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 \equiv 1 + 1 + 4 + 6 + 4 + 3 \equiv 5$ mod 7.

Az a 35-ös maradékosztály, mely 0-val kongruens mod 5 és 5-tel mod 7, a $35k + 5$ alakú számok osztálya. Tehát a keresett maradék 5.

E+15. Egy végtelen kockás füzet rácsvonalain sétál egy hangya. Az egyik rácspont pirossal van megjelölve, ez a kiindulópontja. Minden egyes alkalommal, amikor a hangya elér egy rácspontot, $\frac{1}{3}$ eséllyel egyenesen előre, $\frac{1}{3}$ eséllyel balra és $\frac{1}{3}$ eséllyel jobbra halad tovább. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hangya a 3. kanyarodása után, de a 4. kanyarodásánál nem később visszaér a piros pontba?

Írjátok fel a keresett valószínűséget $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q relatív prím pozitív egészek, és válaszként $p + q$ értékét adjátok meg.

A hangya egyes lépései függetlenek egymástól.

Megoldás: Feltehető, hogy a hangya felfelé indul. A hangyának egy téglalapot kell bejárnia, melyben az első kanyarodás vagy balra, vagy jobbra történik. Mostantól tegyük fel, hogy jobbra (és ne felejtsük el a megoldás végén 2-vel beszorozni az eredményt). Ha felfelé a, majd jobbra b mezőt lép a hangya (ahol $a, b \geq 1$), akkor az így kapott eset valószínűsége $\left(\frac{1}{3}\right)^{2a+2b-1}$.

Itt $\sum\limits_{a=1}^{\infty} \sum\limits_{b=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2a+2b} = \left(\sum\limits_{a=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^a\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right)^2 = \frac{1}{64}$. Tehát $\sum\limits_{a=1}^{\infty} \sum\limits_{b=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2a+2b-1} = \frac{3}{64}$, és a 2-es szorzó miatt a válasz $\frac{3}{32}$.

E+16. Egy táblán a 60-as szám szerepel. Minden lépésben Andris egyesével letörli a lépés elején a táblán lévő számokat, és mindegyiknek a helyére felírja az összes osztóját (beleértve önmagát is). 10 ilyen lépés után hányszor fog szerepelni az 1-es szám a táblán?

Megoldás: Nevezzünk osztóláncnak egy $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{10}$ sorozatot, ha $d_0 = 60$, $d_{10} = 1$ és minden i-re $d_{i+1} \mid d_i$. A feladatban az a kérdés, hogy hány ilyen osztólánc létezik. Ehhez elég megszámolni, hogy a $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$-nek melyik tényezőit mely lépésben "veszítjük" el a 10 közül. A 3-as tényezőt 10 helyen veszíthetjük el, ettől függetlenül az 5-ös tényezőt szintén 10 helyen, a két 2-es elveszítésére pedig $10 + \binom{10}{2} = 55$ lehetőség van (10 eset van arra, hogy egy lépésben, és $\binom{10}{2}$ eset van arra, hogy két lépésben veszítjük el őket). A lehetőségek száma összesen $10 \cdot 10 \cdot 55 = 5500$.