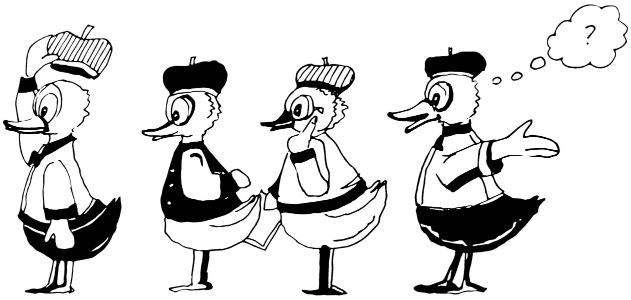
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2021. november 19.

# MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK



# A

KATEGÓRIA

**5-6. osztályosok**

**A1.** Anna és Panna kitalálták, hogy beszínezik az alábbi táblázat néhány mezőjét. Anna beszínezett minden páratlanadik sort, Panna pedig minden párosadik oszlopot. Hány olyan mező van, amit egyik lány se színezett be?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

**Megoldás:** A táblázatban azok a mezők vannak beszínezve, amelyek páratlanadik sorban, vagy párosadik oszlopban vannak, így azok a mezők nincsenek beszínezve, amelyek párosadik sorban és páratlanadik oszlopban vannak. A soruk száma 3-féle lehet (2.,4.,6.), és az oszlopuk száma is 3-féle lehet (1., 3., 5.). Így a nem beszínezett mezők száma $3 \cdot 3 = 9$.

**A2.** Bogi asztalán áll egy szabályos dobókocka. Bogi megszámolta, hogy a látható, azaz a négy oldalsó és a felső lapon levő pöttyök száma 16. Hány pötty látszódna a négy oldalsó és a felső lapon összesen, ha megfordítanánk a kockát? *(Megfordításkor az eddigi felső lap lesz az alsó. A szabályos dobókockán a szemben lévő számok összege 7.)*

**Megoldás:** A dobókockán a pöttyök összege $3 \cdot 7 = 21$. Így kezdetben csak az alsó lap nem látszik, tehát azon $21 - 16 = 5$ pötty van. Az ezzel szemben lévő lapon $7 - 5 = 2$ pötty van. Így megfordításkor 2 pötty lesz az alsó lapon, tehát $21 - 2 = 19$ pötty fog látszódni.

**A3.** A piripócsi piacon még él a cserebere hagyománya. Három csibéért egy libát lehet kapni. Egy libáért és két csibéért egy kacsát tudunk cserélni. A cserék visszafele is érvényesek. Kati néni szeretne csibéket nevelni, viszont jelenleg csak két kacsája és két libája van. Legfeljebb hány csibét tud szerezni Kati néni a cserékkel?

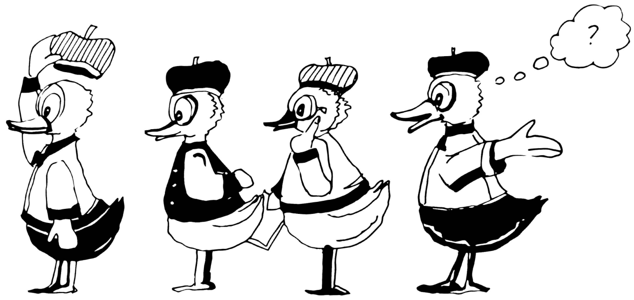
**Megoldás:** Kati néni a két kacsáját be tudja cserélni két libára és négy csibére. Ekkor lesz négy libája és négy csibéje. A négy libát pedig be tudja cserélni $4 \cdot 3 = 12$ csibére. Így 16 csibét tud szerezni Kati néni a cserékkel.

**A4.** Egy hatfős kacsacsalád, azaz az anya, az apa és a négy fióka libasorban totyog a víz felé. Karcsi megfigyelte, hogy a két felnőtt kacsa megy a sor elején és végén, a négy kiskacsa közül a fekete kiskacsa megelőzi a szürkét, a fehér kiskacsa pedig közvetlen a sárga után megy. Hányféle sorrendben haladhat a víz felé a kacsacsalád?

**Megoldás:** A sor elején az anya vagy az apa mehet, a másik pedig a sor végén, tehát ez eddig 2-féle lehetőség. A maradék 4 helyen a sárga után közvetlenül a fehér jön, így a sárga kacsa 3 helyen lehet a maradék 4 helyből, mert az utolsón nem lehet. Ekkor a fehér kacsa 1 helyre kerülhet, közvetlenül a sárga után, és a kimaradó 2 helyen egyféleképpen lehet a fekete és a szürke, mert a fekete megy a korábbi helyen. Így ez összesen $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség.

**A5.** A mai dátum leírásában (2021.11.19.) az a különleges, hogy egymás után szerepel benne négy azonos számjegy. Hasonló módon írva a dátumokat hány nap múlva fordul elő újra az, hogy négy azonos számjegy szerepeljen egymás után a dátumban? *(A hónap és a nap sorszámát mindig két számjeggyel írjuk.)*

**Megoldás:** 2021-ben nincs több ilyen dátum, mert a 11. hónapban a napok ezt követően 2-essel, vagy 3-assal kezdődnek, és a 12. hónapban legfeljebb 3 azonos számjegy lehet egymás után. 2022-ben a 2-es nem lehet egymás után 4-szer, mert nincs 22. hónap, viszont az 1-es lehet a 2022.11.11. dátum leírásában, és semelyik más számjegy sem lehet, mert akkor a hónapok és napok helyén kellene lennie 4 azonos számjegynek, viszont a hónapokból csak a 11. megfelelő. Így legközelebb 2022.11.11-én lesz ilyen dátum, amely $365 - 8 = 357$ nap múlva lesz (hiszen 2022 nem szökőév).






**A6.** Sári üzenetet ír a barátnőjének. A barátnője látja, hogy Sári pontosan 1 percig gépelt, mielőtt elküldte a 76 karakteres üzenetet. Hányszor nyomta meg a 'törlés' gombot Sári, ha tudjuk, hogy minden másodpercben 2 billentyűt ütött le? *Sári a 'törlés' gombbal mindig pontosan egy karaktert törölt ki.*

**Megoldás:** Sári 1 perc alatt $60 \cdot 2 = 120$ billentyűt ütött le, de ebből csak 76 karaktert küldött el. Így $120 - 76 = 44$ extra billentyűt ütött le, ennek a fele volt törlés, és a fele karakter, mert ekkor lesz 0 a hossza ezen résznek. Tehát 22-szer nyomta meg a törlés gombot Sári.

**A7.** A hápfalvi általános iskola ötödik és hatodik osztálya közös osztálykirándulásra megy Récefalvára. A 60 gyerek közül 30-an inkább úszni, 30-an pedig inkább fagyizni szeretnének délután. A gyerekek ötfős szobákba vannak osztva, és minden szoba azt a délutáni programot választja a két lehetőség közül, amelyiket a szoba lakói közül többen szeretnének csinálni. Legfeljebb hány gyerek megy majd úszni délután az osztálykirándulók közül?

**Megoldás:** Azon szobákból mennek úszni a gyerekek, ahol legalább 3-an úszni szeretnének menni. Tehát legfeljebb $30 : 3 = 10$ szoba dönt az úszás mellett. Ezt el is érhetjük, ha 10 olyan szoba van, ahol 3-an szeretnének úszni, és 2-en fagyizni, és a maradék 2 szobában 5-en fagyizni. Tehát legfeljebb $10 \cdot 5 = 50$ gyerek megy úszni délután.

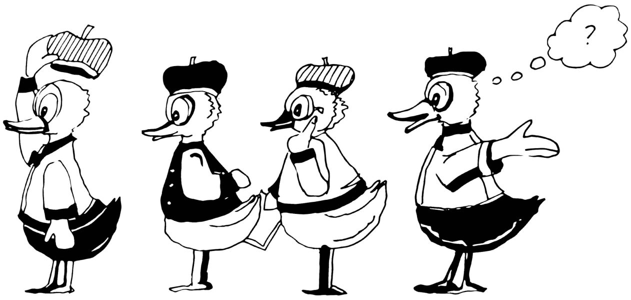
**A8.** Andris és Anett elmentek kirándulni egy 10 kilométer hosszú túrára. Erdész Ervin, a barátjuk, a túraútvonal mellett néhány különböző helyre táblákat helyezett el. A táblákon pozitív egész számok vannak, melyek azt hivatottak jelezni, hogy milyen messze van még a túra vége. Erdész Ervin összesen hat táblát rakott le, azonban figyelmetlen volt, és bár minden táblát egész számnyi kilométerre helyezett el a céltól, három táblára mégis helytelen számot festett. Andrisék a túra során a következő sorrendben látták a feliratokat: 8, 6, 2, 7, 3, 4. Hány kilométerre voltak valójában a céltól a harmadik táblánál?

**Megoldás:** A 3. tábla biztosan hibás, mert azt követően még 3 pozitív egész számnak kellene lennie, viszont a 2-nél csak 1 kisebb pozitív egész szám van. A 4. tábla is biztosan hibás, mert ha jó lenne, akkor előtte csak 10, 9, 8 lehetne, de akkor az első 3 tábla a hibás, és az utolsó 2 tábla jó, de a 3 után a 4 nem lehet jó. Valamint az 5. és 6. táblák közül van a 3. hibás, mert mindkettő nem lehet helyes. Tehát az első és a második tábla helyes. Ekkor a 6. tábla nem lehet helyes, mert ekkor a 6 és a 4 között 3 egész számnak kellene lennie, ami nem lehet. Így az első, a második és az ötödik tábla a helyes. Ekkor a harmadik és negyedik tábla távolsága a céltól 5 és 4, mert a második táblán 6 áll, az ötödik táblán pedig 3. Így a harmadik táblánál valójában 5 kilométerre voltak a céltól Andrisék.

**A9.** A Kecses Víziló nevű hajón csak lovagok és lókötők tartózkodnak, összesen 21-en. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. Amikor a Kecses Víziló háromhónapos útja végén kikötött Óxisz szigetén, a hajót egyesével hagyták el a legénység tagjai, úgy, hogy az utolsó a kapitány volt. A kapitányt leszámítva mindenki ezt mondta távozáskor: „A hajón maradók között több lókötő van, mint lovag." Hány lókötő szolgál a Kecses Víziló fedélzetén?

**Megoldás:** Ha a kapitány lovag, akkor az előtte leszálló hazudott, mert 1 lovag volt a hajón, tehát lókötő, az azelőtt leszálló is hazudott, mert 1 lovag és 1 lókötő volt a hajón, tehát lókötő, viszont az azelőtt leszálló már igazatt mondott, mert 1 lovag és 2 lókötő volt a hajón, tehát lovag, és ugyanígy ezt megelőzően felváltva szállt le lókötő és lovag. Így ebben az esetben 11 lókötő és 10 lovag szolgál a hajón. Ha pedig a kapitány lókötő, akkor az előtte leszálló igazat mondott, mert 1 lókötő volt a hajón, tehát lovag, az azelőtt leszálló hazudott, mert 1 lovag és 1 lókötő volt a hajón, tehát lókötő, és innentől ugyanúgy felváltva, mint az előző esetben. Tehát ebben az esetben is 11 lókötő és 10 lovag szolgál a hajón.

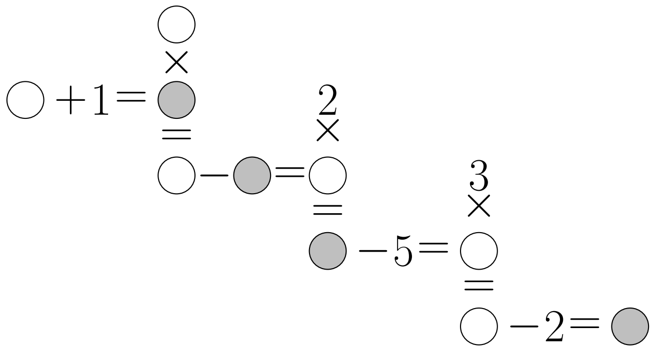
**A10.** Bolha Boldi szeret ugrándozni a síkon. Egyik délután úgy kezdte az ugrálást, hogy 1 métert ugrott jobbra, majd 2 métert felfele. Ezután úgy folytatta az ugrálást, hogy minden ugrása 1 méterrel hosszabb volt az előzőnél. Legalább hányat kellett ugrania a délután folyamán, hogy visszajusson a kiindulóhelyre, ha minden ugrását balra, jobbra, felfele vagy lefele tette meg?



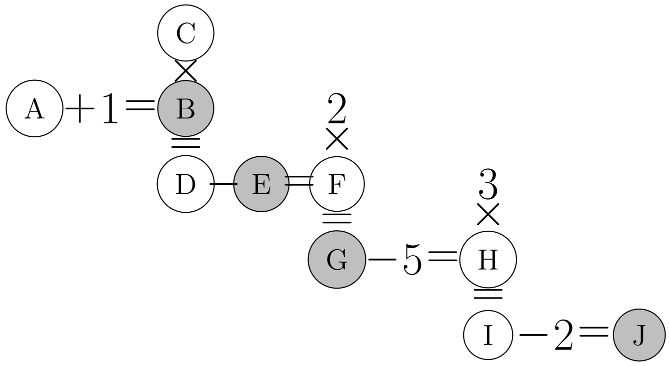


**Megoldás:** Bolha Boldi összesen páros sok métert ugrott, mert jobbra és balra ugyanannyit ugrott, valamint felfelé és lefelé is ugyanannyit ugrott, így páros sok métert kellett ugrania összesen. Ha az utolsó ugrása $n$ méter hosszú, akkor összesen $\frac{n(n+1)}{2}$ métert ugrott, azaz $n$ vagy $n+1$ osztható 4-gyel. Ha $n = 3$ vagy $n = 4$, akkor nem érhetett vissza ilyen kezdéssel a kezdőpontba, mert mindkét irányban vissza kellene ugrania 1-et, illetve 2-t, de ezt egy 3 és egy 4 hosszú ugrással nem tudja megtenni. A következő lehetőség az $n = 7$, ekkor viszont vissza tud érni, például így: 1-et jobbra, 2-t felfelé, 3-at lefelé, 4-et lefelé, 5-öt felfelé, 6-ot jobbra, 7-et balra. Ekkor jobbra ment $1+6-7 = 0$-t, és felfelé ment $2-3-4+5 = 0$-t. Tehát legalább 7-et kellett ugrania Bolha Boldinak.

**A11.** Írjátok be a körökbe a számokat 1-től 10-ig úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek. Mennyi a szürke körökbe írt számok összege? *Minden számot pontosan egyszer használhattok fel, és minden körbe egy számot kell írni.*




**Megoldás:**

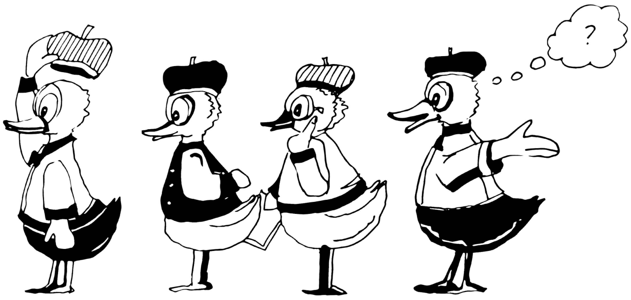



A fenti jelölés mellett tekintsük először a $G-5 = H$ és $2 \cdot F = G$ egyenleteket. Mivel mindegyik körbe 1-től 10-ig kell számokat írni, $10 \geq G \geq 6$, így $5 \geq F \geq 3$, $G$ értéke 6, 8, vagy 10, ebből H-é 1, 3, vagy 5. Azonban a $3 \cdot H = I$ miatt $H \neq 5$, hiszen ekkor $I = 15$ lenne. Ha $H = 1$, akkor $I = 3$, tehát $J = I - 2 = 1$, ami ellentmond annak, hogy minden számot pontosan egyszer használhatunk fel. Ezekből következik, hogy $H = 3$, $I = 3 \cdot H = 9$, $J = I - 2 = 7$, $G = H + 5 = 8$, $F = \frac{G}{2} = 4$.

Az eddig fel nem használt számok az $1, 2, 5, 6, 10$. Az A, B, C és E egyike sem lehet a 10-es, mert ekkor nem lehet a többi körbe a szabályoknak megfelelően kitölteni a köröket. Tehát $D = 10$. Ez egyben azt is jelenti, hogy a C, és B az 5 és a 2 a $C \cdot B = D$ egyenlet alapján. A B nem lehet az 5-ös, mert akkor $A = 5 - 1 = 4 = F$ lenne. Vagyis $B = 2$, $A = 1$, $C = 5$, $E = D - F = 6$.

Tehát a szürke körökbe írt számok összege 2+6+8+7=23.

**A12.** Mickey Egér, Minnie Egér és Donald Kacsa egy utca azonos oldalán laknak. Mickey a 35-ös, Minnie pedig az 59-es szám alatt lakik. Tudjuk, hogy Mickey és Donald között éppen feleannyi ház található, mint Donald és Minnie közt. Hányas szám alatt lakik Donald Kacsa? *(Szokás szerint az utca egyik oldalán a páratlan, a másik oldalán a páros házszámú házak vannak.)*





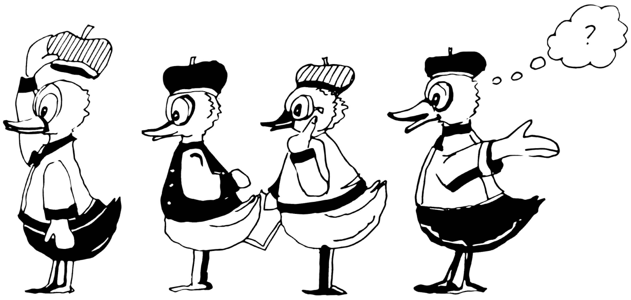
**Megoldás:** Ha Donald Mickey és Minnie között lakik, akkor mivel Mickey és Minnie között 11 ház van, így ebből az egyik Donaldé, és a maradék 10 ház közül ha $n$ db van Mickey és Donald között, akkor $2n$ db van Donald és Minnie között, viszont a $3n = 10$ egyenletnek a megoldása nem egész, így ez az eset nem lehetséges. Így mivel Donald Mickey-hez lakik közelebb, így Donald az utca Mickey-n túli részén lakik. Ekkor ha Donald és Mickey között $n$ ház van, akkor Donald és Minnie között $2n$ ház van, viszont ez épp Mickey házával, és a Mickey és Minnie közti 11 házzal több, mint $n$. Így $n + 12 = 2n$, azaz $n = 12$. Így Mickey és Donald között 12 ház van, ezek a 33-astól a 11-esig vannak, tehát Donald a 9-es szám alatt lakik.

**A13.** A kacsaiskolában három kategóriában lehet szinteket szerezni: hápogás, tojásrakás és repülés. Ezek segítségével kitüntetéseket lehet szerezni. Egy kitüntetést akkor kap meg valaki, ha a háromféle kategória közül legalább kettőben eléri (vagy meghaladja) a megfelelő szintet. Ezeket a szinteket az alábbi táblázat tartalmazza. Donald kacsa eddig a három kategóriában szerzett szintjeinek összege 16, amivel már háromféle kitüntetést összegyűjtött az alábbi négyből. Mennyi Donald kacsának az egyes kategóriákban szerzett szintjeinek szorzata? *Az egyes kategóriák szintjei csak növekedni tudnak, és kezdetben Donald kacsa mindenből 0. szinten áll.*

| Kategóriák | Hápogás | Tojásrakás | Repülés |
|---|---|---|---|
| Kék kitüntetés | 6. szint | 6. szint | 7. szint |
| Piros kitüntetés | 11. szint | 1. szint | 8. szint |
| Sárga kitüntetés | 3. szint | 3. szint | 11. szint |
| Zöld kitüntetés | 7. szint | 10. szint | 4. szint |

**Megoldás:** Ha Donald kacsa már megszerezte a zöld kitüntetést, akkor tojásrakásból nem érhette el a 10. szintet, mert ha elérte volna, akkor a zöld kitüntetéshez kellett hápogás 7.szint, ami már összesen 17 szint, ez nem lehet, vagy a repülés 4. szint, ekkor még 2 szintet léphetett másból, de ekkor hápogásból nem érhette el a 3. szintet, tehát 3 kitüntetést kellett tojásrakással és repüléssel elérnie, ehhez repülés 8. szint kellett volna, de az már 18 szint, ez sem lehet. Tehát ha megszerezte a zöld kitüntetést, akkor hápogásból 7. szintet és repülésből 4. szintet elért. Ekkor ha megszerezte a sárga kitüntetést is, akkor azt csak tojásrakás 3. szinttel érhette el, mert repülésből nem lehetett 11-es. Ekkor ez már 14 szint összesen, és a piros kitüntetéshez még legalább 4 szint kellene (hápogásból vagy repülésből), a kékhez pedig még legalább 3 szint (tojásrakásból vagy repülésből), tehát ekkor nem lehet 3 kitüntetése. Tehát ha a zöldet megszerezte, akkor a sárgát nem szerezhette meg, így a kéket és a pirosat kellett. Ekkor a pirosat tojásrakással és repüléssel kellett megszereznie, mert ha hápogásból 11-es lett volna, akkor még 1 szintlépése maradt, ami tojásrakásból kell a piros kitüntetéshez, de ekkor a kék kitüntetést nem szerezte meg. Így tojásrakásból 1-es szintű, repülésből 8-as szintű, hápogásból 7-es szintű. Ezzel megszerezte a kék, piros és zöld kitüntetéseket. Ha pedig a zöld kitüntetést nem szerezte meg, akkor a kéket, pirosat és sárgát gyűjtötte össze, a sárga kitüntetést hápogásból és tojásrakásból kapta meg, mert ha repülésből 11-es szintű lett volna, és mellette valamiből 3-as, akkor csak 2 szintlépése maradt volna, és így a kék kitüntetéshez szükséges további 3 szintet nem érhette volna el. Tehát hápogásból és tojásrakásból legalább 3-as szinten van. Így a piros kitüntetést tojásrakással és repüléssel szerezte meg, mert ha hápogásból 11-es szintű lett volna, akkor még 2 szintlépése maradt volna, de azzal nem szerezhette meg a kéket, mert ahhoz még 3 szint kellene tojásrakásból. Így repülésből legalább 8-as szintű a piros kitüntetés miatt. Ekkor $3 + 3 + 8 = 14$ szintet lépett már, tehát 2 szintlépése maradt a kék kitüntetéshez, de ahhoz még 3 kellene hápogásból vagy tojásrakásból. Tehát ez az eset sem lehetséges. Így hápogásból 7. szintű, tojásrakásból 1. szintű és repülésből 8. szintű, így a szintek szorzata $8 \cdot 1 \cdot 7 = 56$.

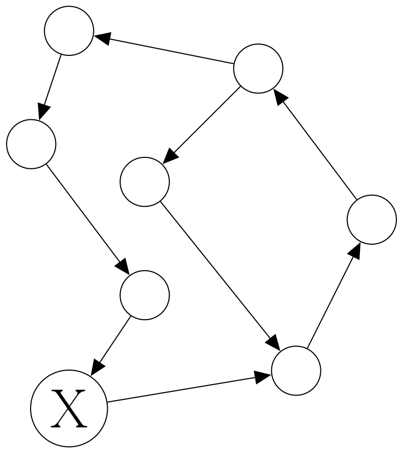
**A14.** Egy sakkversenyen 6-an vettek részt, mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2, a döntetlen 1, a vereség 0 pontot ért. A versenyen Niki második, Tiki harmadik, Viki negyedik helyezést ért el. Legfeljebb hány pontot szerezhettek ők hárman összesen? *(A helyezések pontszám szerint csökkenő sorrendben vannak, azonos pontszámok esetén sorsolással döntötték el a helyezéseket.)*






**Megoldás:** Összesen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ meccset játszottak le, és minden meccsen 2 pontot osztottak ki, tehát összesen 30 pontot osztottak ki. Ebből 2 pontot az 5. és 6. helyezett meccsén osztottak ki, így az első 4 legfeljebb 28 pontot szerzett összesen, így ebből a második, harmadik és negyedik legfeljebb 21-et szerezhetett, mert ha legalább 22-t szereztek volna, akkor az első helyezettnek legfeljebb 6 pontja lehetett volna, így a második, harmadik és negyedik összesen legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$ pontot szerezhetett volna, ami ellentmondás. Ez pedig el is érhető, ha az első 4 helyezett mind megverte az ötödik és hatodik helyezetteket, és egymással pedig döntetleneztek, ekkor mindannyiuknak $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ pontja lett, ekkor a második, harmadik és negyedik összesen 21 pontot szerzett.

**A15.** Az ábrán Óxisz országának 8 szigete látható, melyek közt a nyilak irányában hajójáratok közlekednek, az év minden napján. Lord Kalandor az X-szel jelölt szigeten él, és az a terve, hogy a következő 100 nap mindegyikén felszáll majd egy olyan hajójáratra, ami az aktuális tartózkodási szigetéről indul, és az éjszakát azon a szigeten tölti, ahova a hajó vitte. A terv hallatán Lord Kalandor felesége azonnal összeírta, hogy a következő 100 nap közül melyek azok, amiken a férje biztosan nem a saját szigetükön fogja tölteni az éjszakát. Hány napot írt fel magának? *(Lord Kalandor az első napon az X-szel jelölt szigetről indul, azt viszont nem tudjuk, hogy a 100. napon hova fog megérkezni.)*




**Megoldás:** Azt kell megnézni, hogy hányadik napokhoz van olyan útvonal, amelynél az X-szel jelölt szigeten alszik az adott napon (ezeket nevezzük elérhető napoknak). Ha valamelyik nap elérhető, akkor a nála 4-gyel nagyobb is, hiszen csak a kis körön körbemegyünk még egyszer. Így elég 4-es maradék szerint megvizsgálni, hogy melyik a legkisebb adott maradékú nap, amely elérhető. A 4-es maradék akkor változik, ha a nagy körön megyünk körbe, így a legkisebb elérhetőket akkor kapjuk az adott maradékból, ha a lehető legkevesebbszer megyünk körbe a nagy körön, és a kicsit nem használjuk. A $4k + 3$ alakú napoknál elérhető a 7, ha a nagy körön egyszer körbemegyünk, így innen 1 napot írt fel a felesége ($k = 0$). A $4k + 2$ alakú napoknál a 14 elérhető, ha 2-szer megyünk körbe, tehát innen 3 napot írt fel ($0 \geq k \geq 2$). A $4k + 1$ alakú napoknál a 21 elérhető, ha 3-szor megyünk körbe, tehát innen 5 napot írt fel ($0 \geq k \geq 4$). A $4k$ alakú napoknál a 28 elérhető, ha 4-szer megyünk körbe, tehát innen 6 napot írt fel ($1 \geq k \geq 6$). Tehát a felírt napok száma $1 + 3 + 5 + 6 = 15$.