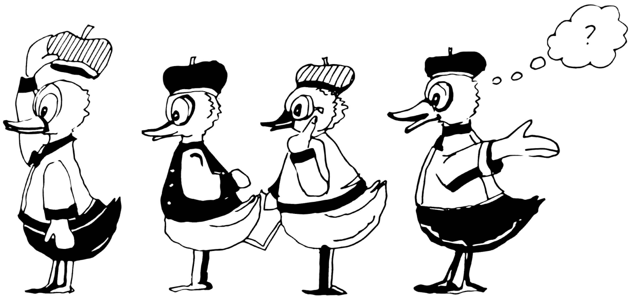
XV. DÜRER VERSENY

Döntő:
2022. június 3-4.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



A
KATEGÓRIA
Kifejtős forduló

5-6. osztályosok

A1. A Kacsacsa Tánciskolában 3 gácsér (Kacsaba, Márkacsa, Patrikacsa) és 4 tojó (Arankacsa, Ilonkacsa, Jutkacsa, Zorkacsa) tanul páros táncokat. Az este folyamán három tánc van, és minden tánc esetén minden pár egy tojóból és egy gácsérból áll. (Így minden táncnál egy tojó pár nélkül marad.)

Az első tánc során Kacsaba-Arankacsa, Márkacsa-Ilonkacsa, illetve Patrikacsa-Jutkacsa voltak a párok, míg a második tánc során Kacsaba-Jutkacsa, Márkacsa-Arankacsa és Patrikacsa-Zorkacsa táncoltak együtt. Keressetek egy lehetséges párosítást a harmadik táncra, ha tudjuk, hogy Patrikacsa nem akar táncolni Arankacsával, és azt se szeretnénk, hogy két kacsa többször is táncoljon egymással. *Nem kell az összes esetet megkeresni, elég egy lehetséges párosítást találni.*

Megoldás:

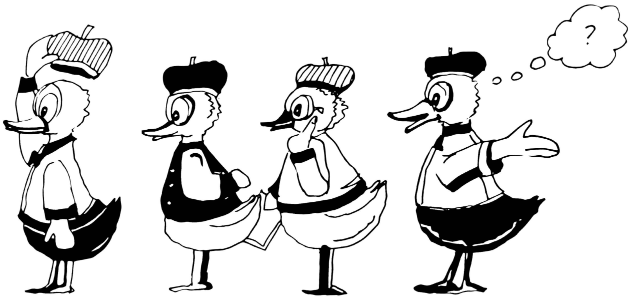
Vizsgáljuk meg, hogy ki lehet Patrikacsa párja a harmadik táncban! Mivel már táncolt Jutkacsával és Zorkacsával, ezért ők nem lehetnek. Ezen kívül Arankacsával nem szeretne táncolni, így a párja csak Ilonkacsa lehet.

Ezután Kacsaba lehetséges párját vizsgáljuk meg. Tudjuk, hogy Ilonkacsa nem lehet, hiszen ő már foglalt, vele Patrikacsa fog táncolni. Ezen kívül az első két táncban Arankacsa és Jutkacsa volt a két párja Kacsabának, tehát velük sem táncolhat most. Így egy lehetőség maradt: Kacsaba párja mindenképpen Zorkacsa.

Végül Márkacsa párját találjuk ki. Tudjuk, hogy nem lehet Ilonkacsa és Zorkacsa, hiszen velük a másik két gácsér táncol. Másrészt a második táncban Arankacsával táncolt, így az egyetlen lehetőség Jutkacsa. Márkacsa és Jutkacsa nem táncolt még együtt, így ők tényleg lehetnek is az utolsó pár.

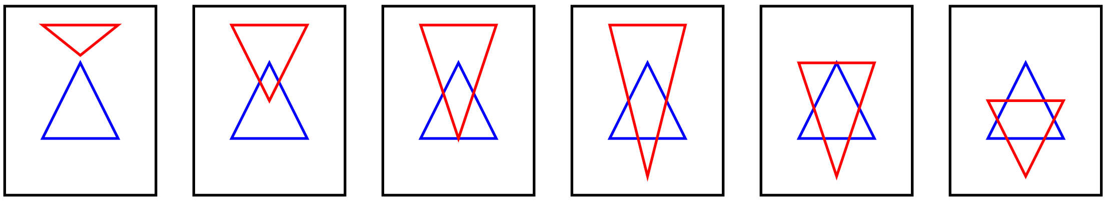
Ezzel a gondolatmenettel tehát megtaláltuk az egyetlen lehetséges párosítást: Patrikacsa Ilonkacsával, Kacsaba Zorkacsával és Márkacsa Jutkacsával táncol.

Megjegyzés: Az itt leírt megoldás azt is mutatja, hogy hogyan lehet rájönni a helyes megoldásra, illetve hogy csak egyetlen megoldás létezik. Természetesen már az is maximális pontot ért, ha valaki csak közölte a helyes párosítást.



A2. Hány részre oszthatja a síkot két háromszög? Adjatok példát az összes esetre! *Nem kell megindokolnotok, hogy más lehetőség nincs.*

Megoldás: A $3, 4, 5, 6, 7$ és 8 esetek mindegyike lehetséges:



A feladatnak nem volt része, de a teljesség kedvéért megmutatjuk, hogy más érték nem lehetséges.

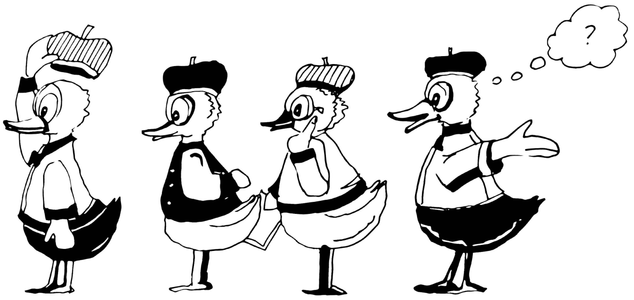
Világos, hogy a két háromszög legalább három részre osztja a síkot. Mutassuk meg, hogy 8-nál több rész biztosan nem keletkezhet. Először nézzük meg csak azt, hogy az egyik (mondjuk a kék) háromszög belsejét legfeljebb hány részre osztja a másik háromszög. Ez legfeljebb 4 rész, mivel a másik (piros) háromszög oldalai olyan szakaszok, amik nem metszik egymást, így minden szakasz behúzása legfeljebb eggyel növeli a részek számát a kék háromszögben, vagyis összesen legfeljebb 4 rész keletkezhet. Hasonlóan a piros háromszög belsejét legfeljebb 4 részre oszthatja a kék háromszög.

Ha a két háromszög nem metszi egymást, akkor 3 részre osztják a síkot. Ha metszik, akkor van egy olyan rész, ami mindkét háromszögben benne van, vagyis legfeljebb

$$\text{a kék háromszög belsejében lévő részek} + \text{a piros háromszög belsejében lévő részek} -$$

$$\text{a két háromszög közös része} + \text{a külső rész} \leq 4 + 4 - 1 + 1 = 8$$

részre osztja a két háromszög a síkot.



A3. Kriszti a kedvenc Donald kacsás könyvét annyit olvasgatta, hogy a regény közepéről kiesett néhány szomszédos lap. Így az egyik helyen kinyitva a könyvet, a két látható oldalszám összege 49, viszont egyet lapozva ez az összeg már 71.

a) Hány oldal hiányzik?

b) Meg lehet-e egyértelműen állapítani ezek alapján, hogy melyik a legkisebb hiányzó oldalszám? *A könyvet kinyitva mindig bal oldalon találhatóak a páros, jobb oldalon a páratlan oldalszámok.*

Megoldás:

a) Ha egy könyvben nem hiányzik egyetlen oldal sem, akkor a két oldal összege 4-gyel változik egy lapozás után, mivel mindkét oldalon 2-2-vel változik az oldalszám. Azáltal hogy kiesett néhány lap a könyvből, az egyik oldalszám megváltozott annyival, amennyi oldal kiesett. Mivel most a különbség a lapozás során $71 - 49 = 22$, ezért $22 - 4 = 18$ oldal esett ki a könyvből.

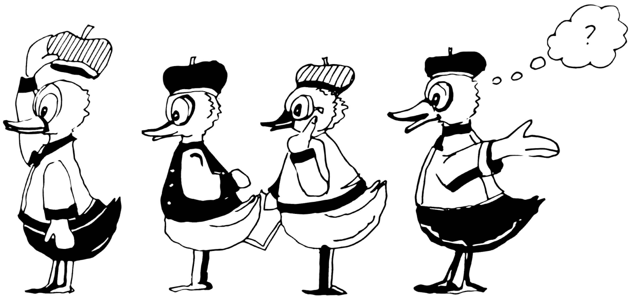
b) Két lehetőség fordulhat elő aszerint, hogy melyik helyről estek ki az oldalak.

Ha a 49 összegű oldalak közül, akkor a 71 az két szomszédos szám összegéből adódik, azaz a 35 és a 36 a két oldalszám amit ebben az esetben látunk. A 35-ös oldal másik felén a 34-os számnak kell lennie, ami alapján annak a másik oldalán a $49 - 34 = 15$-nek kell lennie, mivel az összeg 49.

Ha a 71 összegű oldalak közül estek ki lapok, akkor a 49 az két szomszédos szám összegéből adódik, ami világos, hogy a 24 és 25. A 25-ös oldal másik felén a 26-os számnak kell lennie, ami alapján annak a másik oldalán a $71 - 26 = 45$-nek kell lennie.

Ezek alapján két megoldás jött ki, viszont az első esetben nem teljesül az, hogy a könyv bal oldalán szerepelnek a páros számok, így az nem lehetséges.

Vagyis csak egyféle megoldás lehetséges, azaz egyértelműen megállapítható, hogy 27-től 44-ig hiányoznak a könyvben az oldalszámok, azaz a legkisebb hiányzó oldalszám a 27.



A4. Rakjatok műveleti jeleket $(+, -, \cdot, /)$ és zárójeleket az egyenlőségek bal oldalára úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek. *Minden szomszédos számjegypár közé kell tenni egy műveleti jelet.*

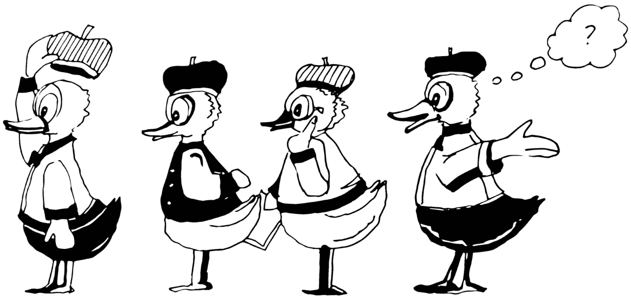
$$\begin{array}{lccccccccl}
\textbf{a)} & & & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 = 20 \\
\textbf{b)} & & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 = 202 \\
\textbf{c)} & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 = 2022
\end{array}$$

Megoldás: Minden feladatrészre számos megoldás létezik, mindegyikre mutatunk 6 megoldást.

a) Például:
$$\begin{aligned}
&7 + 6 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 20\\
&7 + 6 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 20\\
&7 + 6 + 5 - 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20\\
&7 \cdot (6 - 5 - 4 + 3 \cdot 2) - 1 = 20\\
&7 \cdot 6 \,/\, (5 - 4 + 3 - 2) - 1 = 20\\
&- 7 + 6 \cdot 5 - 4 + 3 - 2 \cdot 1 = 20
\end{aligned}$$

b) Például:
$$\begin{aligned}
&8 + (7 \cdot 6 \cdot 5) - 4 \cdot (3 + 2 - 1) = 202\\
&8 \cdot (7 + 6 + 5 + 4 + 3) + 2 \cdot 1 = 202\\
&- 8 + 7 + (6 \cdot 5 + 4) \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 202\\
&- 8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 - 3) \cdot (2 - 1) = 202\\
&8 \cdot (7 \cdot (6 + 5) \,/\, 4 + 3 + 2 + 1) = 202\\
&8 \cdot (7 \cdot (6 + 5) \,/\, 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1) = 202
\end{aligned}$$

c) Például:
$$\begin{aligned}
&9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 - 5) \cdot 4 + 3 + 2 + 1 = 2022\\
&9 \cdot (8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 + 3) - 2 - 1 = 2022\\
&9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 - 5) \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2022\\
&(9 \cdot 8 \cdot 7 + 6 - 5) \cdot 4 + 3 - 2 + 1 = 2022\\
&9 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5 + 4 - 3) - 2 - 1 = 2022\\
&9 \cdot (8 + 7) \cdot (6 + 5 + 4) - 3 \cdot (2 - 1) = 2022
\end{aligned}$$



A5. Nagymama 90. születésnapjára összegyűlt az összes unokája. A vacsorán az unokák megszámolták, hogy hány unokatestvérük van jelen, és ezt meg is osztották a többiekkel. Minden válasz vagy 6, vagy 7 volt. Hány unokája lehet a nagymamának? *Adjatok példát minél több lehetséges értékre. Amikor úgy gondoljátok, hogy más érték már nem lehetséges, indokoljátok is azt. Lehetséges, hogy a válaszok közt a 6 és a 7 is előfordult, de az is lehetséges, hogy minden válasz ugyanaz volt.*

Megoldás: A nagymama unokái néhány családot alkotnak. Két unokát egy családba tartozónak mondunk, ha testvérek.

Az unokák száma 7, 8, 9, 10, 12, 13 vagy 14 lehet. Mindegyikre mutatunk egy példát. A példákban azt soroljuk fel, hogy melyik családban hányan vannak az unokák közül, azaz például a 3. példában három darab két fős, és egy három fős család van.

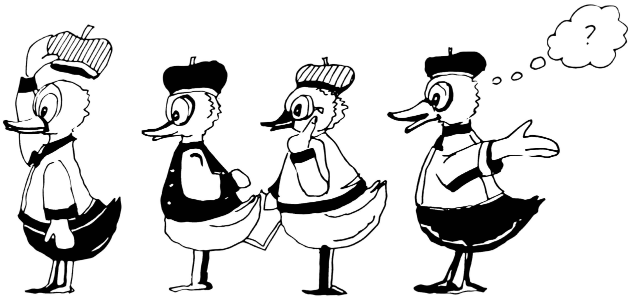
- 7 unoka: 1+1+1+1+1+1+1
- 8 unoka: 2+2+2+2
- 9 unoka: 2+2+2+3
- 10 unoka: 3+3+4
- 12 unoka: 6+6
- 13 unoka: 6+7
- 14 unoka: 7+7

Más számok nem lehetségesek, ezt most meg is indokoljuk.

Ha az unokák száma legfeljebb 6 lenne, akkor közülük bármelyiknek csak legfeljebb 5 unokatestvére lehetne, tehát ez nem lehetséges.

Ha az unokák száma 15 vagy több lenne, akkor két különböző családból két unokát (nevezzük őket Anettnak és Bencének) tekintve, minden unokának Anett és Bence közül legalább az egyikük unokatestvére. Tehát Anettnak és Bencének az unokatestvéreinek számát összeadva legalább 15-öt kapunk. Azonban a feladat feltételei alapján ez a szám legfeljebb $7 + 7 = 14$ lehet, ami nem lehet.

Ha az unokák száma 11 lenne, akkor minden unokának vagy 3 testvére van (ha az általa mondott szám 7) vagy 4 testvére van (ha az általa mondott szám 6). Azonban 4 és 5 fős családokból sehogyan nem rakható össze a 11, ezért ez az eset sem lehetséges.



A6. **(Játék)** Egy kupacban 3 darab 1, 5 darab 2 és 7 darab 3 pengős érme van. Egy lépésben az éppen soron lévő játékos elvesz egy érmét a kupacból, és helyette berakhat egy darab kisebb értékű érmét, vagy dönthet úgy, hogy nem tesz be semmit. Az nyer, aki elveszi az utolsó érmét a kupacból.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Hagyjuk a másik játékost kezdeni. Miután lépett, biztosan lesz olyan érme, amiből páros darab van, és olyan is, amiből páratlan.

Ha csak az egyik típusból van páratlan, akkor vegyünk el egy ilyen érmét, és ne rakjunk hozzá semmit.

Ha két típusból van páratlan, akkor ezek közül a nagyobból vagyünk el egyet, és a kisebb típusúhoz rakjunk hozzá egy érmét.

Így a lépésünk után biztosan mindháromféle érméből páros darabszámú lesz.

Innentől másoljuk amit az ellenfél csinál és lépjük mindig ugyanazt, mint amit előttünk lépett. Így minden lépésünk után minden érméből páros darab lesz. Ezt mindig meg tudjuk tenni, mert amiből az ellenfél elvesz, abból páratlan számú marad. Látható, hogy ezzel a stratégiával csak mi tudjuk elvenni az utolsó érmét, így biztosan nyerünk.

Megjegyzés: A fent leírt megoldásból könnyű kiolvasni, hogy általánosan mikor kinek van nyerő stratégiája, azaz amikor nem 3 darab 1-es, 5 darab 2-es és 7 darab 3-assal indulunk, hanem tetszőleges más kiindulásból. Mindezt részletesen kifejtjük a B játék megoldásában.