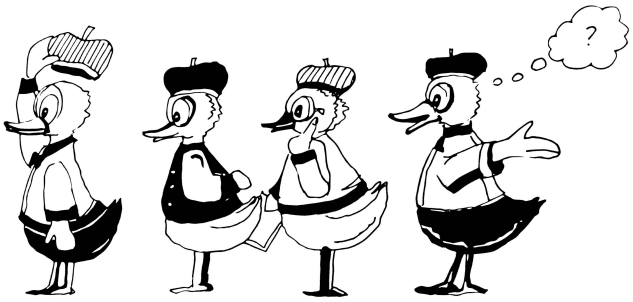
XV. DÜRER VERSENY

Döntő: 2022. június 3-4.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



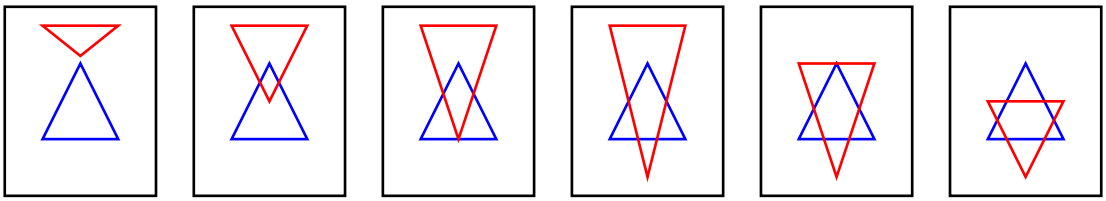
B

KATEGÓRIA
Kifejtős forduló

7-8. osztályosok

B1. Hány részre oszthatja a síkot két háromszög? Adjatok példát az összes esetre! *Nem kell megindokolnotok, hogy más lehetőség nincs.*

Megoldás: A $3, 4, 5, 6, 7$ és 8 esetek mindegyike lehetséges:



A feladatnak nem volt része, de a teljesség kedvéért megmutatjuk, hogy más érték nem lehetséges.

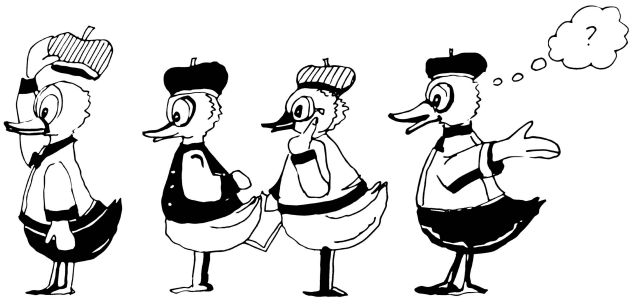
Világos, hogy a két háromszög legalább három részre osztja a síkot. Mutassuk meg, hogy 8-nál több rész biztosan nem keletkezhet. Először nézzük meg csak azt, hogy az egyik (mondjuk a kék) háromszög belsejét legfeljebb hány részre osztja a másik háromszög. Ez legfeljebb 4 rész, mivel a másik (piros) háromszög oldalai olyan szakaszok, amik nem metszik egymást, így minden szakasz behúzása legfeljebb eggyel növeli a részek számát a kék háromszögben, vagyis összesen legfeljebb 4 rész keletkezhet. Hasonlóan a piros háromszög belsejét legfeljebb 4 részre oszthatja a kék háromszög.

Ha a két háromszög nem metszi egymást, akkor 3 részre osztják a síkot. Ha metszik, akkor van egy olyan rész, ami mindkét háromszögben benne van, vagyis legfeljebb

$$\text{a kék háromszög belsejében lévő részek} + \text{a piros háromszög belsejében lévő részek} -$$

$$\text{a két háromszög közös része} + \text{a külső rész} \leq 4 + 4 - 1 + 1 = 8$$

részre osztja a két háromszög a síkot.

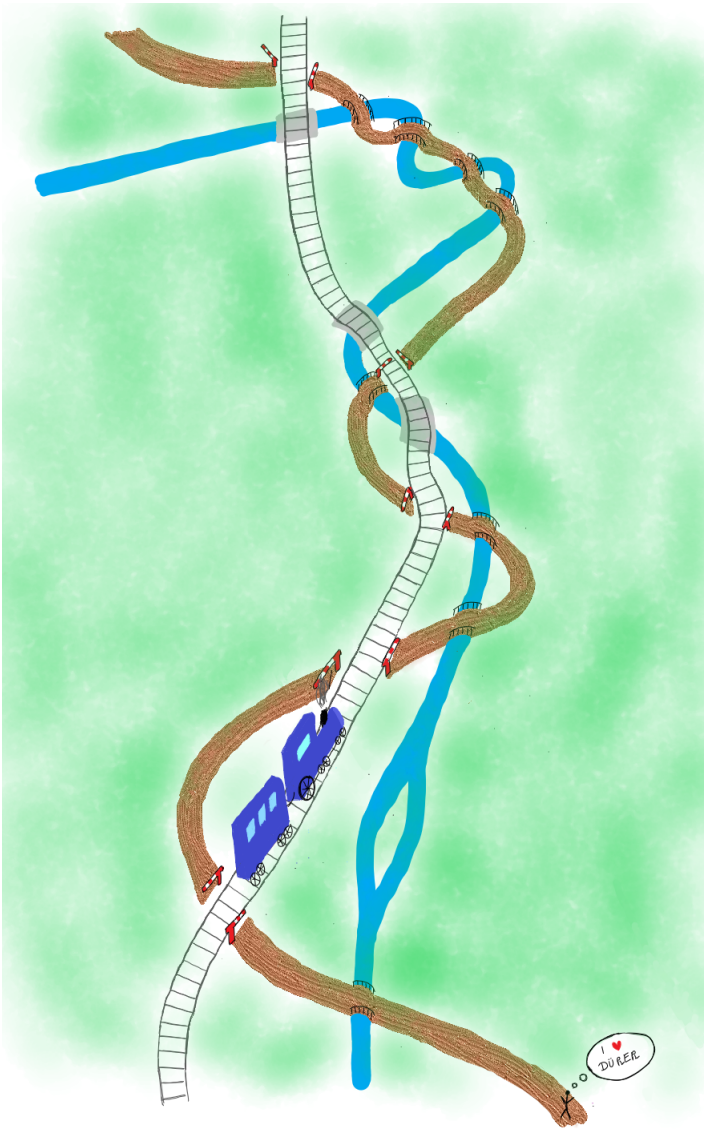


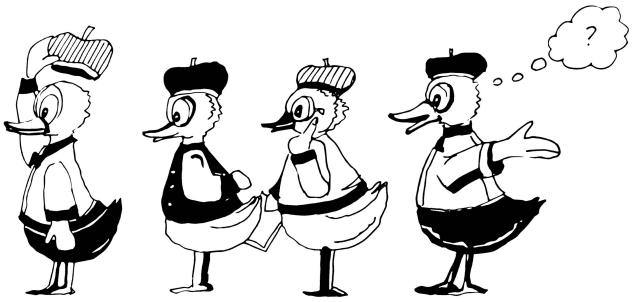
B2. Egy túrán vesztek részt, végig egy patak és egy vasútvonal mellett haladtok. Kezdetben tőletek balra van a patak, és a pataktól balra a vasút. A túra végéig nyolcszor keresztezitek a patakot és ötször a vasutat. Meg lehet-e állapítani, hogy a túra végén milyen sorrendben helyezkedik el a patak, a vasút és a túra útvonala? *A patak, a vasútvonal és a túra útvonala végig egymás mellett, egy irányba haladtak. A vasút keresztezheti a patak útját.*

Megoldás:

A fő észrevétel az, hogy pontosan akkor kerülünk a folyó másik oldalára, hogyha páratlan sokszor kereszteztük. Hiszen gondoljuk meg, hogy ha kétszer keresztezzük a folyót, akkor visszakerülünk az eredeti oldalára, tehát ha páros sokszor keresztezzük, akkor ugyanazon az oldalon maradunk, különben pedig a másik oldalára kerülünk. Természetesen ez a gondolatmenet ugyanígy elmondható a vasútvonalra is.

Tudjuk, hogy a patakot nyolcszor keresztezzük, tehát a végén ugyanazon az oldalán maradunk, mint eredetileg, azaz a túraút bal oldalán lesz a folyó. A vasutat ötször keresztezzük, tehát a végén a másik oldalunkon lesz, azaz a túraúttól jobbra. Tehát tőlünk balra van a folyó, jobbra pedig a vasút, ezzel megállapítottuk a sorrendet. Az ábrán egy lehetséges példa látható.





B3. Rakjatok műveleti jeleket $(+, -, \cdot, /)$ és zárójeleket az egyenlőségek bal oldalára úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek. *Minden szomszédos számjegypár közé kell tenni egy műveleti jelet.*

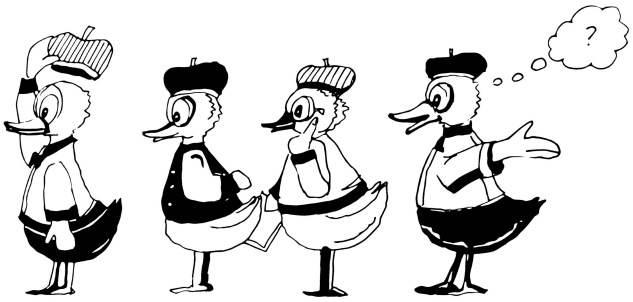
a)			7	6	5	4	3	2	$1 = 20$
b)		8	7	6	5	4	3	2	$1 = 202$
c)	9	8	7	6	5	4	3	2	$1 = 2022$

Megoldás: Minden feladatrészre számos megoldás létezik, mindegyikre mutatunk 6 megoldást.

a) Például: $7 + 6 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 20$
$7 + 6 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 20$
$7 + 6 + 5 - 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20$
$7 \cdot (6 - 5 - 4 + 3 \cdot 2) - 1 = 20$
$7 \cdot 6 \,/\, (5 - 4 + 3 - 2) - 1 = 20$
$-7 + 6 \cdot 5 - 4 + 3 - 2 \cdot 1 = 20$

b) Például: $8 + (7 \cdot 6 \cdot 5) - 4 \cdot (3 + 2 - 1) = 202$
$8 \cdot (7 + 6 + 5 + 4 + 3) + 2 \cdot 1 = 202$
$-8 + 7 + (6 \cdot 5 + 4) \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 202$
$-8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 - 3) \cdot (2 - 1) = 202$
$8 \cdot (7 \cdot (6 + 5) \,/\, 4 + 3 + 2 + 1) = 202$
$8 \cdot (7 \cdot (6 + 5) \,/\, 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1) = 202$

c) Például: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 - 5) \cdot 4 + 3 + 2 + 1 = 2022$
$9 \cdot (8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 + 3) - 2 - 1 = 2022$
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 - 5) \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2022$
$(9 \cdot 8 \cdot 7 + 6 - 5) \cdot 4 + 3 - 2 + 1 = 2022$
$9 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5 + 4 - 3) - 2 - 1 = 2022$
$9 \cdot (8 + 7) \cdot (6 + 5 + 4) - 3 \cdot (2 - 1) = 2022$



B4. Nagymama 90. születésnapjára összegyűlt az összes unokája. A vacsorán az unokák megszámolták, hogy hány unokatestvérük van jelen, és ezt meg is osztották a többiekkel. Minden válasz vagy 6, vagy 7 volt. Hány unokája lehet a nagymamának? *Adjatok példát minél több lehetséges értékre. Amikor úgy gondoljátok, hogy más érték már nem lehetséges, indokoljátok is azt. Lehetséges, hogy a válaszok közt a 6 és a 7 is előfordult, de az is lehetséges, hogy minden válasz ugyanaz volt.*

Megoldás: A nagymama unokái néhány családot alkotnak. Két unokát egy családba tartozónak mondunk, ha testvérek.

Az unokák száma 7, 8, 9, 10, 12, 13 vagy 14 lehet. Mindegyikre mutatunk egy példát. A példákban azt soroljuk fel, hogy melyik családban hányan vannak az unokák közül, azaz például a 3. példában három darab két fős, és egy három fős család van.

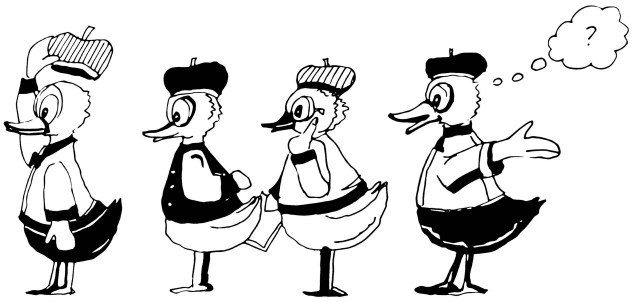
- 7 unoka: 1+1+1+1+1+1+1
- 8 unoka: 2+2+2+2
- 9 unoka: 2+2+2+3
- 10 unoka: 3+3+4
- 12 unoka: 6+6
- 13 unoka: 6+7
- 14 unoka: 7+7

Más számok nem lehetségesek, ezt most meg is indokoljuk.

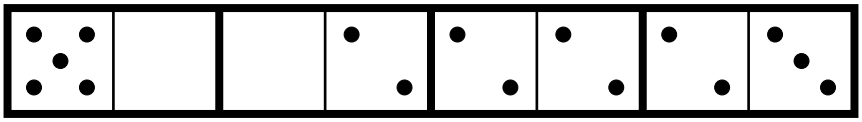
Ha az unokák száma legfeljebb 6 lenne, akkor közülük bármelyiknek csak legfeljebb 5 unokatestvére lehetne, tehát ez nem lehetséges.

Ha az unokák száma 15 vagy több lenne, akkor két különböző családból két unokát (nevezzük őket Anettnak és Bencének) tekintve, minden unokának Anett és Bence közül legalább az egyikük unokatestvére. Tehát Anettnak és Bencének az unokatestvéreinek számát összeadva legalább 15-öt kapunk. Azonban a feladat feltételei alapján ez a szám legfeljebb $7 + 7 = 14$ lehet, ami nem lehet.

Ha az unokák száma 11 lenne, akkor minden unokának vagy 3 testvére van (ha az általa mondott szám 7) vagy 4 testvére van (ha az általa mondott szám 6). Azonban 4 és 5 fős családokból sehogyan nem rakható össze a 11, ezért ez az eset sem lehetséges.

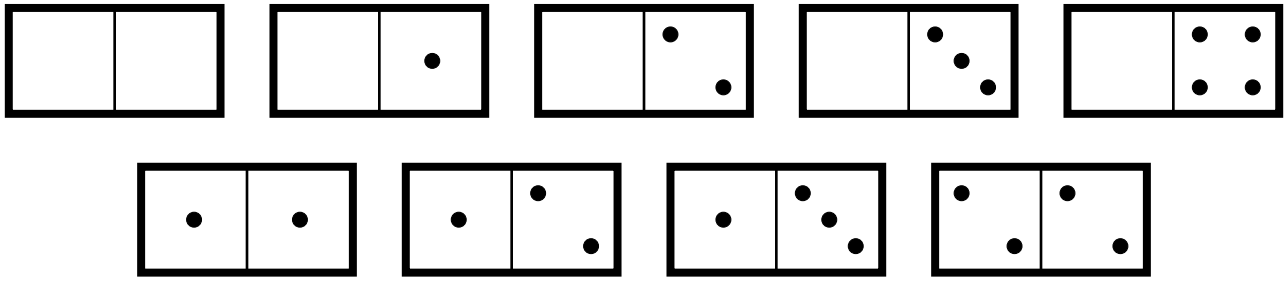


B5. Egy dominókészletben olyan dominók vannak, melyeknek mindkét felében 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 pötty lehet. Az összes lehetséges kombinációból pontosan egy darab van, tehát összesen 28 darab. Dominika kiválasztotta az összes olyan dominót, amelyen legfeljebb 4 pötty van a két oldalon összesen.
a) Hány dominót választott ki Dominika?
Néhány dominó egy sorba rakása szabályos, ha a szomszédos dominók szomszédos dominórészeiben a pöttyök száma megegyezik. *Például az alábbi ábrán néhány dominó szabályosan van sorba rakva.*



b) Hányféleképpen tudja Dominika szabályosan sorba rakni az általa kiválasztott dominókat? *Két sorba rakás akkor különbözik, ha balról jobbra nézve van olyan dominórész, amiben különbözik a pöttyök száma a két sorrendben.*

Megoldás: a) Dominika az alábbi dominókat választotta ki:



Ez összesen 9 darab.

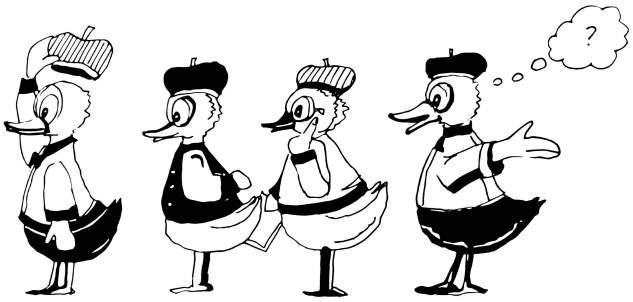
b) Jelöljük a dominókat két számmal a pöttyeik szerint. Tehát például a $(3, 1)$ számpár azt jelöli, aminek az egyik oldalán 3, a másikon 1 pötty van. Először is számoljuk meg azokat az eseteket, amikor a $(0, 0), (1, 1)$ és $(2, 2)$ dominók elhagyásával rakjuk sorba őket.

Vegyük észre, hogy a szélső számokat leszámítva, minden szám páronként szerepel, így ha egy szám páratlanszor szerepel, akkor abból az egyik előfordulás a szélén lesz. A számokat megnézve az 1 és 4 páratlanszor szerepel, így ezeknek kell szerepelni a szélén. Először számoljuk meg azokat az eseteket, amikor a 4-es van bal oldalt. Ezt 2-vel szorozva megkapjuk a végső megoldást, hiszen minden szabályos dominósorozat a másik irányban is szabályos. Tehát a bal oldalt a $(4, 0)$-s dominó fog szerepelni.

Vagyis még a $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ és $(1, 3)$ dominókat kell lerakni úgy, hogy a bal végén 0, a jobb végén 1 legyen. Vegyük észre, hogy a $(0, 2)$ és az $(1, 2)$ dominók a 2-es végüknél lesznek összecsatolva, míg a $(0, 3)$ és az $(1, 3)$ dominók a 3-as végüknél. Ezeket összetolva 3 dominósorunk maradt: $(0, 1)$, $(0, 2)(2, 1)$ és $(0, 3)(3, 1)$. Mindhárom dominósor egyik végén 0, másikon 1 van, így látható, hogy ezt a három dominósort bármilyen sorrendben egymás után rakhatjuk, vagyis 6-féleképpen tehetjük le őket. Tehát $2 \cdot 6 = 12$ szabályos sorbarakás van, ha a $(0, 0), (1, 1)$ és $(2, 2)$ dominókat nem nézzük.

Vegyük észre, hogy ebben a 12 sorrendben a $(2, 2)$ dominót egyféle helyre tudjuk berakni, míg az $(1, 1)$ és $(0, 0)$ dominók kétféleképpen illeszthetőek be a sorba. Így ezekből $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ helyes sorrend készíthető. Továbbá az is látható, hogy így minden szabályos sorbarakást megkapunk.

Így összesen 48-féleképpen rakhatók sorba a dominók.



B6. **(Játék)** Van egy kupacban néhány érme, mindegyik 1, 2 vagy 3 pengős. Egy lépésben az éppen soron lévő játékos elvesz egy érmét a kupacból, és helyette berakhat egy darab kisebb értékű érmét, vagy dönthet úgy, hogy nem tesz be semmit. Az nyer, aki elveszi az utolsó érmét a kupacból.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején a szervezők döntik el, hogy melyik pengőből hány darab van. Ezek után ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás:

Nevezzük nyerő helyzetnek azt az állást, amit előállítva biztosan nyerünk. Ilyen például a végső cél, vagyis hogy mindhárom értékű érméből 0 darab van. Nyerő helyzet még például az, ha 2 darab 1-es marad, hiszen ezután a másik fél csak azt tudja lépni, hogy elveszi az egyiket, mi pedig az utolsót elvéve nyerünk. Célunk az összes nyerő helyzet meghatározása.

Azt állítjuk, hogy azok a nyerő helyzetek, amikor vagy mindhárom típusú érméből páros, vagy mindháromból páratlan számú van. Az előbb említett példák is ilyenek. Most bebizonyítjuk, hogy tényleg ezek a nyerő helyzetek.

Ha nyerő helyzetet hagyunk a lépésünk után, akkor világos, hogy az ellenfél nem tud ezután nyerő helyzetre lépni.

Továbbá bármelyik nem nyerő helyzetről nyerő helyzetre tudunk lépni, mivel egy nem nyerő helyzetben vagy kétféle érméből páros, egyikből páratlan darab van, vagy kettőből páratlan, egyből páros, vizsgáljuk meg ezt a két esetet.

Ha két páros és egy páratlan van, akkor vegyünk el egyet abból a típusból, amiből páratlan darab van és ne tegyünk vissza semmit. Ezután mindhárom típusú érméből páros számú lesz.

Ha két értékből van páratlan számú, akkor vegyünk el a nagyobbik fajtából 1-et, és tegyünk be egy érmét a másik típusúhoz, amiből páratlan darab van. Így megint mindhárom érméből páros számú lesz, vagyis nyerő helyzetre léptünk.

Ezek alapján akkor kell hagyni kezdeni az ellenfelet, ha minden típusúból páros van, vagy mindből páratlan, különben nekünk kell kezdeni, és a fent leírtak szerint mindig nyerő helyzetekre kell lépni.

Megjegyzés: A leírtakból látható, hogy a nyerő játékos az első lépése után olyan helyzetbe tud lépni, hogy minden típusú érméből páros sok legyen. Ezek után működik az a stratégia, hogy mindig lemásolja amit az ellenfél csinál, azaz pontosan ugyanazt lépi, mint az ellenfél előtte. Ekkor a nyerő játékos minden lépése után páros darab lesz mindháromféle érméből, amiből látható, hogy tényleg mindig tud így játszani, és a végén nyerni fog.