

XVI. Dürer Verseny - Online forduló - C kategória megoldásai

Megoldókulcs

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
4	48	700	18	5	16	24	69	44

Részletes megoldások

1. 4 nap múlva fog megpenészedni az egész fürt szőlő.
2. Mivel a falónak 4 lába van, ennek a 25-szöröse pedig 100, ezért a faló lábain kívül $100 - 4 = 96$ láb jutott be, ami alapján $\frac{96}{2} = 48$ ember jutott be a várba.
3. A 30 egység oldalú négyzet területéből ki kell vonni 4 darab 10 egység hosszú befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis $T_{\text{háromszögek}} = \frac{4 \cdot 10^2}{2} = 200$. Az eredeti négyzet területe $T_{\text{négyzet}} = 30^2 = 900$. A nyolcszög területe $T_{\text{nyolcszög}} = T_{\text{négyzet}} - T_{\text{háromszögek}} = 900 - 200 = 700$. Tehát a nyolcszög területe 700 egységnégyzet.
4. Tudjuk, hogy $\frac{(n-2)180^\circ}{n} = 160^\circ$, amiből $n = 18$.
5. Öt lépésben el tud jutni: a negyedik lépésben lép balra, és az összes többiben jobbra, $1+2+3-4+5 = 7$. Ennél kevesebből nem tud, mert 3 lépéssel csak 6 messzire tud jutni, 4 lépéssel pedig könnyű meggondolni, hogy nem érhet 7-re. Ezt végignézni is könnyű, de úgy is lehet látni, hogy összesen $1+2+3+4 = 10$ -t ugrik a bolha, ami páros, így meggondolható, hogy akármilyen irányba is teszi meg az ugrásokat, biztosan páros pontba érkezik.
6. Tudjuk, hogy a harmadik nap halat eszik, így az első nap még nem ehet azt. Ekkor tehát az első két napja csak sertés-csirke, vagy csirke-sertés lehet. A negyedik és ötödik napján nem ehet halat, így ez a két napja szintén csak csirke-sertés vagy sertés-csirke lehet. Ekkor a hatodik napon bármit ehet, ami nem az ötödik napi, és ugyanígy a hetedik napon bármit ehet, ami nem a hatodik napi. Tehát összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetősége van.
7. Mivel minden sorban és oszlopban 1 darab 0-s van, így a második sorban és a második oszlopban is. Ekkor a második sorban levő 0 oszlopa az a feltételeknek megfelelő, hiszen abban az oszlopban tényleg a 2022 olvasható ki. Hasonlóan a második oszlopban levő 0 sora is a feltételeknek megfelelő. Így tehát minden lehetséges kitöltés az utóbbi feltételnek is megfelel.

Ilyen kitöltés pedig 24 van, mert a legfelső sorban 4 oszlopban lehet 0, a második sorban már csak a megmaradt 3 oszlop közül választhatunk, és így tovább, ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

8. Legyen E az emberek, P a pegazusok, K a kentaurok száma. Ekkor egyenletekkel felírva a feladatot:

$$193 = E + P + K$$

$$666 = 2E + 4P + 4K$$

$$244 = 2E + 2K$$

Az első egyenlet négyszereséből kivonva a második egyenletet kapjuk, hogy 53 ember van. A harmadikba ezt behelyettesítve megkapjuk, hogy 69 kentaur van. Ellenőrzés: ekkor az első egyenlet alapján 71 pegazus van, és ezek az adatok megfelelnek a feltételeknek.

9. Maradékokkal kifejezve a feladat annak felel meg, hogy keressük meg az első olyan pozitív egész számot, ami 11-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad, 6-tal osztva 2 vagy 3 maradékot ad és 8-cal osztva 4 vagy 5 maradékot ad.

Látható, hogy a 44 ilyen szám, 44 perc múlva valóban mindhárom fej aludni fog egy percig, hiszen az első fej az ötödik alvását kezdi meg, a második fej a hetedik alvását kezdi meg, míg a harmadik fej az ötödik alvását kezdi meg. Az első fej ezelőtt csak négyszer aludt el, tehát elég ezeket az alvással töltött perceket megnézni, hogy ilyenkor alszik-e a másik két fej is.

Az első két percben a harmadik fej nem alszik, a 11, 12 perc után és 22, 23 perc után a második fej nem alszik, míg 34 és 35 perc után a harmadik fej van ébren. Így tehát először tényleg 44 perc múlva tud elhaladni Kerberosz mellett Orpheusz.