

XVI. Dürer Verseny - Online forduló - D kategória megoldásai

Megoldókulcs

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
6	700	8670	7	16	24	60	69	44

Részletes megoldások

1. 6 nap múlva fog megpenészedni az egész fürt szőlő.

2. A 30 egység oldalú négyzet területéből ki kell vonni 4 darab 10 egység hosszú befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis $T_{\text{háromszögek}} = \frac{4 \cdot 10^2}{2} = 200$. Az eredeti négyzet területe $T_{\text{négyzet}} = 30^2 = 900$. A nyolcszög területe $T_{\text{nyolcszög}} = T_{\text{négyzet}} - T_{\text{háromszögek}} = 900 - 200 = 700$. Tehát a nyolcszög területe 700 egységnégyzet.

3. Viktor rendelése pontosan megfelel annak, ha Miklós tripláját adja le rendelésének és Jóska rendelésének kétszeresét kivonjuk belőle. Vagyis $3 \cdot 5330\text{Ft} - 2 \cdot 3660\text{Ft} = 8670\text{Ft}$ -ot fizetett Viktor.

4. Hét lépésben el tud jutni: például a harmadik és az ötödik lépésben lép balra, és az összes többiben jobbra: $1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 = 12$. Könnyű végignézni, hogy kevesebb lépésből nem lehet. Erre egy trükkösebb indoklás: Ha el tud jutni k lépésben, akkor az $1 + 2 + \dots + k$ összegnek párosnak kell lennie. Hiszen, ha a balra lépések összege l , akkor $12 = 1 + 2 + \dots + k - 2l$, mert l jobbra lépés helyett l balra lépést kell beleszámolnunk. Ekkor viszont 5 vagy 6 lépésben nem tud eljutni, hiszen addig az összegek 15 és 21. Ezen kívül maximum 4 lépés nem elég, hiszen mindig jobbra lépve sem fogja elérni a 12 pontot. Így tehát beláttuk, hogy 7 lépés minimum kell, hogy elérje a 12 pontot és ennyiben el is tudja érni.

5. Tudjuk, hogy a harmadik nap halat eszik, így az első nap még nem ehet azt. Ekkor tehát az első két napja csak sertés-csirke, vagy csirke-sertés lehet. A negyedik és ötödik napján nem ehet halat, így ez a két napja szintén csak csirke-sertés vagy sertés-csirke lehet. Ekkor a hatodik napon bármit ehet, ami nem az ötödik napi, és ugyanígy a hetedik napon bármit ehet, ami nem a hatodik napi. Tehát összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetősége van.

6. Mivel minden sorban és oszlopban 1 darab 0-s van, így a második sorban és a második oszlopban is. Ekkor a második sorban levő 0 oszlopa az a feltételeknek megfelelő, hiszen abban az oszlopban tényleg a 2022 olvasható ki. Hasonlóan a második oszlopban levő 0 sora is a feltételeknek megfelelő. Így tehát minden lehetséges kitöltés az utóbbi feltételnek is megfelel.

Ilyen kitöltés pedig 24 van, mert a legfelső sorban 4 oszlopban lehet 0, a második sorban már csak a megmaradt 3 oszlop közül választhatunk, és így tovább, ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

7. Tudjuk, hogyha a feladatok számát f -nek nevezzük, akkor $\frac{f}{2} + \frac{f}{4} + 40 = 130$, amiből $f = 120$. Ekkor viszont lehet, hogy Loki társai az első 60, az első 40 és az első 40 feladatot csinálták meg, ami azt jelenti, hogy Loki szintén csak az első 60 feladatot tudja megoldani. Ennyit pedig tényleg meg is tud oldani, hiszen Thor 60 feladatát mindenképp meg tudja oldani. Mivel a feladatok száma 120, így legfeljebb 60 feladatot nem tud megoldani Loki.

8. Legyen E az emberek, P a pegazusok, K a kentaurok száma. Ekkor egyenletekkel felírva a feladatot:

$$193 = E + P + K$$

$$666 = 2E + 4P + 4K$$

$$244 = 2E + 2K$$

Az első egyenlet négyszereséből kivonva a második egyenletet kapjuk, hogy 53 ember van. A harmadikba ezt behelyettesítve megkapjuk, hogy 69 kentaur van. Ellenőrzés: ekkor az első egyenlet alapján 71 pegazus van, és ezek az adatok megfelelnek a feltételeknek.

9. Maradékokkal kifejezve a feladat annak felel meg, hogy keressük meg az első olyan pozitív egész számot, ami 11-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad, 6-tal osztva 2 vagy 3 maradékot ad és 8-cal osztva 4 vagy 5 maradékot ad.

Látható, hogy a 44 ilyen szám, 44 perc múlva valóban mindhárom fej aludni fog egy percig, hiszen az első fej az ötödik alvását kezdi meg, a második fej a hetedik alvását kezdi meg, míg a harmadik fej az ötödik alvását kezdi meg. Az első fej ezelőtt csak négyszer aludt el, tehát elég ezeket az alvással töltött percek megnézni, hogy ilyenkor alszik-e a másik két fej is.

Az első két percben a harmadik fej nem alszik, a 11, 12 perc után és 22, 23 perc után a második fej nem alszik, míg 34 és 35 perc után a harmadik fej van ébren. Így tehát először tényleg 44 perc múlva tud elhaladni Kerberosz mellett Orpheusz.