

XVI. Dürer Verseny - Online forduló - E kategória megoldásai

Megoldókulcs

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
18	8670	7	16	24	69	98	24	67

Részletes megoldások

1. Tudjuk, hogy $\frac{(n-2)180^\circ}{n} = 160^\circ$, amiből $n = 18$.

2. Viktor rendelése pontosan megfelel annak, ha Miklós tripláját adja le rendelésének és Jóska rendelésének kétszeresét kivonjuk belőle. Vagyis $3 \cdot 5330\text{Ft} - 2 \cdot 3660\text{Ft} = 8670\text{Ft}$ -ot fizetett Viktor.

3. Hét lépésben el tud jutni: például a harmadik és az ötödik lépésben lép balra, és az összes többiben jobbra: $1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 = 12$. Könnyű végignézni, hogy kevesebb lépésből nem lehet. Erre egy trükkösebb indoklás: Ha el tud jutni k lépésben, akkor az $1 + 2 + \dots + k$ összegnek párosnak kell lennie. Hiszen, ha a balra lépések összege l , akkor $12 = 1 + 2 + \dots + k - 2l$, mert l jobbra lépés helyett l balra lépést kell beleszámolnunk. Ekkor viszont 5 vagy 6 lépésben nem tud eljutni, hiszen addig az összegek 15 és 21. Ezen kívül maximum 4 lépés nem elég, hiszen mindig jobbra lépve sem fogja elérni a 12 pontot. Így tehát beláttuk, hogy 7 lépés minimum kell, hogy elérje a 12 pontot és ennyiben el is tudja érni.

4. Tudjuk, hogy a harmadik nap halat eszik, így az első nap még nem ehet azt. Ekkor tehát az első két napja csak sertés-csirke, vagy csirke-sertés lehet. A negyedik és ötödik napján nem ehet halat, így ez a két napja szintén csak csirke-sertés vagy sertés-csirke lehet. Ekkor a hatodik napon bármit ehet, ami nem az ötödik napi, és ugyanígy a hetedik napon bármit ehet, ami nem a hatodik napi. Tehát összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetősége van.

5. Mivel minden sorban és oszlopban 1 darab 0-s van, így a második sorban és a második oszlopban is. Ekkor a második sorban levő 0 oszlopa az a feltételeknek megfelelő, hiszen abban az oszlopban tényleg a 2022 olvasható ki. Hasonlóan a második oszlopban levő 0 sora is a feltételeknek megfelelő. Így tehát minden lehetséges kitöltés az utóbbi feltételnek is megfelel.

Ilyen kitöltés pedig 24 van, mert a legfelső sorban 4 oszlopban lehet 0, a második sorban már csak a megmaradt 3 oszlop közül választhatunk, és így tovább, ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

6. Legyen E az emberek, P a pegazusok, K a kentaurok száma. Ekkor egyenletekkel felírva a feladatot:

$$193 = E + P + K$$

$$666 = 2E + 4P + 4K$$

$$244 = 2E + 2K$$

Az első egyenlet négyszereséből kivonva a második egyenletet kapjuk, hogy 53 ember van. A harmadikba ezt behelyettesítve megkapjuk, hogy 69 kentaur van. Ellenőrzés: ekkor az első egyenlet alapján 71 pegazus van, és ezek az adatok megfelelnek a feltételeknek.

7. Legyen a kétjegyű számunk $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$ alakú, ahol a és b számjegyek, és a nem 0. Ekkor felírhatjuk a következő összefüggést $\overline{ab} = 10 \cdot a + b = x \cdot a \cdot b$, ahol x egy pozitív egész szám. Átalakítva az összefüggést kapjuk, hogy $10 \cdot a = (xa - 1)b$. Láthatjuk, hogy itt a és $xa - 1$ relatív prímekek minden

esetben, vagyis $(xa - 1) \mid 10$. Ha $xa = 11$, akkor visszahelyettesítve $a = b$, és $a \mid 11$, így $a = b = 1$, tehát csak 11 lehet a szám. Ha $xa = 6$, akkor $b = 2a$ és $a \mid 6$, ahonnan 12, 24, 36 a lehetséges esetek. Ha $xa = 3$, akkor $b = 5a$ és $a \mid 3$, ekkor csak 15 lehet. Ha $xa = 2$, akkor $b = 10a$, tehát nincs ilyen szám. Figyeljük meg, hogy a fent megtalált számok tényleg felezettek. Így a felezett számok összege $11 + 12 + 24 + 36 + 15 = 98$.

8. Jelölje A a fa, B a bokor és C a ház helyét. Tudjuk, hogy ABC derékszögű, vagyis a Pitagorasz-tétel miatt $AB = 41\text{cm}$. Ekkor tehát ha D a virágágyás és AB metszéspontja, akkor $BD = BA - CA = 41\text{cm} - 9\text{cm} = 32\text{cm}$, ez a virágágyás sugara. Ha E a kérdéses érintési pont, akkor a BEC derékszög, vagyis ismét a Pitagorasz-tételt használva $BE = 24\text{cm}$.

9. Maradékokkal kifejezve a feladat annak felel meg, hogy keressük meg az első olyan pozitív egész számot, ami 11-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad és 6-tal osztva 1 vagy 2 maradékot ad és 7-tel osztva 3 vagy 4 maradékot ad.

Láthatjuk, hogy a 67 ilyen szám, tehát elég látni, hogy semelyik ennél kisebb szám nem megfelelő. Az első fejnek ez a hetedik alvása, tehát elég az ezelőtti alvással töltött perceit megnézni, hogy ilyenkor alszik-e a másik két fej is.

Az első két percben a harmadik fej van ébren, 11, 12 perc és 22, 23 és 33, 34 a második fej nem alszik. Míg 44 perc elteltével a harmadik fej nem alszik, de 45 perc elteltével szintén a második fej van ébren. Míg 55 és 56 perc elteltével a harmadik fej nem alszik és 66 perc múlva a második fej nem alszik. Így tehát először tényleg 67 perc múlva tud elhaladni Kerberosz mellett Orpheusz.