kategória

C

9-10. osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2022. november 18.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK

C1. Nevezzünk egy dátumot *mesésnek*, ha benne a hónap és a nap számjegyeinek összege éppen megegyezik a hónap számával. A mai dátum (november 18., vagyis 11.18.) pont ilyen, mivel $1 + 1 + 1 + 8 = 11$. Soroljátok fel az összes, egy évben előforduló mesés dátumot! (A Válaszlapon több hely van, mint ahány mesés dátum.)

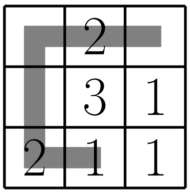
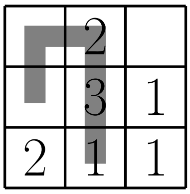
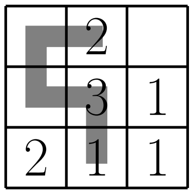
Megoldás: Vegyük észre, hogy ha a hónap száma egyjegyű, akkor a dátum biztos nem mesés, mert ha a hónap számához még hozzáadjuk a nap számjegyeit, akkor az biztosan nagyobb lesz, mint a hónap száma. Így mesés dátum csak októberi, novemberi vagy decemberi lehet, az a kérdés, hogy milyen napokat válasszunk, hogy a dátum mesés legyen. Nézzük például az októbert: ő a 10. hónap, ezért egy októberi dátum pontosan akkor lesz mesés, ha a nap számjegyeinek összege $10-(1+0) = 9$. Azt vehetjük észre, hogy november és december esetében is az olyan napokat keressük, amelyek számjegyeinek összege 9, mert $11-(1+1) = 9$ és $12-(1+2) = 9$. Ezek a napok lehetnek 9.,18. és 27., így összesen 9 megoldásunk van, amelyek a következők: 10.09., 10.18., 10.27., 11.09., 11.18, 11.27, 12.09., 12.18. és 12.27.

C2. Thészeusz egy 4×4-es négyzetrács alakú labirintusban bolyong úgy, hogy mindig olyan mezőre lép, ami oldalszomszédos azzal, amin áll, de még nem járt rajta korábban. Miután befejezte a sétát, a labirintus térképén néhány mezőre ráírja, hogy annak hány oldalszomszédján járt. Olyan mezőkön is járhatott, amelyekre írt számot. Mi lehetett Thészeusz útvonalának a nyomvonala az alábbi jegyzet szerint? Minden lehetőséget rajzoljatok le a Válaszlapra! (A Válaszlapon több hely van, mint ahány útvonal.)

2			1
1		3	
	1	1	

Az alábbi ábrákon egy példát láthattok egy 3×3-as jegyzet esetén a három lehetséges nyomvonalra.

	2	
	3	1
2	1	1

Megoldás: Keressük meg a táblázatban azokat a mezőket, ahol biztosan járt Thészeusz, illetve azokat is, ahol biztosan nem.

A 2-es mindkét oldalszomszédján járt, és így a bal oldali oszlopban levő 1-esnek megtaláltuk az egyetlen olyan szomszédját, amit útba ejtett, tehát a másik két oldalszomszédján nem járhatott. Ezek alapján a 3-asnak kizártuk az egyik oldalszomszédos mezőjét, a másik három szomszédján tehát biztosan járt, és így az alsó sorban levő bal oldali 1-es szomszédai is rendben vannak.

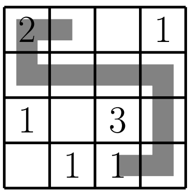
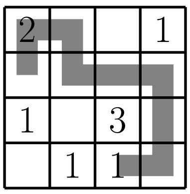
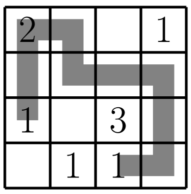
Ha a térképen O-val jelöljük, hogy hol járt biztosan Thészeusz, X-szel pedig azokat a mezőket, ahol biztosan nem, a jelenlegi információink szerint így néz ki a térképe:

2	O		1
O		O	
1	X	3	O
X	1	①	

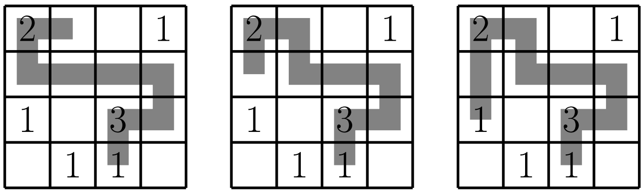
Ezután három esetet választhatunk szét aszerint, hogy az alsó sorban levő jobb oldali 1-es melyik szomszédján járt Thészeusz.

1. Ha a szomszédos egyesen járt volna, nem tudna erről a két mezőről tovább menni, pedig a fentiek alapján más mezőkön is járt, így ebben az esetben nem kapunk megoldást.

2. Ha a jobb alsó sarokban járt, akkor az az egyes, amely szerint tárgyaljuk az eseteket, az útjának az egyik végpontja. Mivel így a 3-ast tartalmazó mezőn biztosan nem járt, folytathatjuk az útvonalat felfelé, és így kiderül, hogy a jobb felső sarokban levő 1-es bal oldali szomszédján már biztosan nem járt Thészeusz. Tekintsük a négyzetrácsot felező függőleges szakaszt. Ennek mindkét oldalán van olyan mező, ahol járt Thészeusz, de csak egy helyen léphetett át. Így az útvonal két végpontja a tábla két felében van, tehát a jobb felső sarokba nem léphetett, mert az csak végpont lehetne. A táblázat bal oldalán az útvonalat háromféleképpen tudjuk befejezni úgy, hogy érintsük azokat a mezőket, ahol biztosan járt, és a szabályoknak megfelelő legyen:

3. A harmadik eset, amikor a 3-ast tartalmazó mezőn járt, ekkor szintén igaz, hogy az útjának egyik végpontja volt az az 1-es, amely szerint tárgyaljuk az eseteket. A jobb felső sarokban levő 1-es alsó szomszédján kellett járnia, hiszen vagy az alatta levő mezőről tovább kell menjen, vagy oda kell érkezzen, ha a 3-asról nem oda lép. Ekkor viszont a jobb felső sarokban levő egyes másik szomszédján nem járt, így hasonló helyzettel állunk szemben, mint az előző esetben. Nézzük a táblát felező függőleges szakaszt. Ennek mindkét oldalán vannak mezők, amelyeken járt, viszont csak egy helyen léphetett át, így a két végpont a táblázat két különböző felében van. Emiatt a jobb felső sarokban levő egyesen nem járhatott, mert az csak végpont tudna lenni. A táblázat jobb oldalán egyféleképpen tudjuk befejezni a nyomvonalat, a bal oldalon háromféleképpen:



Így a fent lerajzolt 6-féle nyomvonala lehet Thészeusz útvonalának.

C3. Egy ókori számológépen az alábbi 4 gomb található: $+3$, -3, $\cdot 3$, $/3$. A számológép kijelzőjén kezdetben a 21-es szám olvasható. Amikor megnyomunk egy gombot, akkor a számológép a kijelzőn látható számmal végrehajtja a kiválasztott műveletet, és a kijelzőn az eredményként kapott szám jelenik meg. Anna úgy nyomta meg egymás után a négy gombot (mindegyiket egyszer), hogy a lehető legnagyobb számot kapja, Béla pedig (szintén a 21-től indulva) úgy, hogy a lehető legkisebbet. Milyen számot kapott Anna és Béla?

Ha például a gombokat $+3$, -3, $/3$, $\cdot 3$ *sorrendben nyomjuk meg, akkor az eredmény* $(((21+3)-3)/3)\cdot 3 = 21$.

Megoldás: Összesen 24-féleképp tudjuk elvégezni a műveleteket, mert ennyi módon tudjuk sorba rakni őket. Az alábbiakban leírjuk az összes lehetőséget a benyomások sorrendjére (a zárójeleket elhagyva).

Ha szorzás az első művelet: $21 \cdot 3/3 + 3 - 3 = 21$, $21 \cdot 3/3 - 3 + 3 = 21$, $21 \cdot 3 + 3 - 3/3 = 21$, $21 \cdot 3 + 3/3 - 3 = 19$, $21 \cdot 3 - 3 + 3/3 = 21$ és $21 \cdot 3 - 3/3 + 3 = 23$.

Ha osztás az első művelet: $21/3 \cdot 3 + 3 - 3 = 21$, $21/3 \cdot 3 - 3 + 3 = 21$, $21/3 + 3 \cdot 3 - 3 = 27$, $21/3 + 3 - 3 \cdot 3 = 21$, $21/3 - 3 + 3 \cdot 3 = 21$ és $21/3 - 3 \cdot 3 + 3 = 15$.

Ha összeadás az első művelet: $21 + 3 \cdot 3/3 - 3 = 21$, $21 + 3 \cdot 3 - 3/3 = 23$, $21 + 3/3 \cdot 3 - 3 = 21$, $21 + 3/3 - 3 \cdot 3 = 15$, $21 + 3 - 3/3 \cdot 3 = 21$ és $21 + 3 - 3 \cdot 3/3 = 21$.

Ha kivonás az első művelet: $21 - 3 \cdot 3 + 3/3 = 19$, $21 - 3 \cdot 3/3 + 3 = 21$, $21 - 3 + 3 \cdot 3/3 = 21$, $21 - 3 + 3/3 \cdot 3 = 21$, $21 - 3/3 + 3 \cdot 3 = 27$ és $21 - 3/3 \cdot 3 + 3 = 21$.

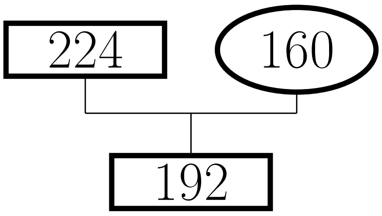
Ezek alapján látható, hogy Anna 27-et és Béla pedig 15-öt kapott.

C4. A fiatal Theodórosz ükszülei az elsők között telepedtek le egy görög faluban. Néhányan óriások voltak, a többiek pedig törpék. Az ükszülők közül a törpék 128 pekhüsz, az óriások pedig 256 pekhüsz magasak voltak. Az ükszülőkön kívül mindenkinek a magassága az apja és az anyja magasságának az átlaga. Akkor neveznek valakit törpének, ha minden felmenője törpe, illetve akkor óriás, ha minden felmenője óriás. A következőket tudjuk Theodórosz felmenőiről:

- Theodórosznak 2 szülője, 4 nagyszülője, 8 dédszülője és 16 ükszülője van.
- Theodórosz 168 pekhüsz magas.
- Theodórosz ükszülei között az anyai ágon eggyel több óriás van, mint az apai ágon.
- Theodórosz apja és apai nagyapja ugyanolyan magasak.
- Theodórosz egyik nagymamája 128 pekhüsz magas.
- Theodórosz egyik dédanyja óriás.
- Theodórosznak az ükszülei között anyai ágon több női, mint férfi óriás van.
- Theodórosz apjának férfi felmenői egy családtag kivételével mind törpék.

A Válaszlapon megadott családfán írjátok be az összes családtag pekhüszben mért magasságát!

A családfában a téglalapok jelölik a férfiakat, az oválisok pedig a nőket. Az alábbi példában egy háromtagú család családfája látható, ahol az apa 224 pekhüsz, az anya 160 pekhüsz magas, fiuk pedig 192 pekhüsz magas.



Megoldás: Vegyük észre, hogy Theodórosz magassága pekhüszben mérve az ükszülei magasságának átlaga, így ki tudjuk számolni, hogy az ükszülők között hány törpe és hány óriás van. Ha k jelöli az óriások számát, a következőt írhatjuk: $\frac{k \cdot 256 + (16-k) \cdot 128}{16} = 168 \Rightarrow 2k + 16 - k = 21 \Rightarrow k = 5$.

Így, mivel anyai ágon eggyel több óriás van Theodórosz ükszülei között, mint apai ágon, anyai ágon 3, apai ágon 2 óriás van az ükszülők között.

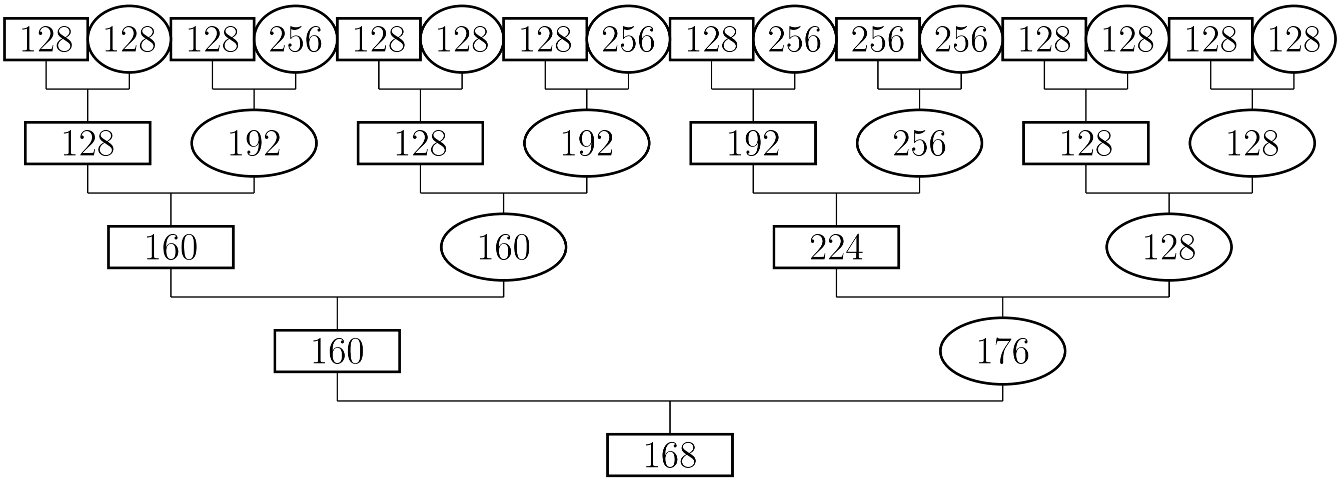
Kiszámolhatjuk Theodórosz szüleinek magasságát pekhüszben. Theodórosz apjának magassága az apai ágú ükszülők magasságának átlaga, akik közül a fentiek alapján ketten óriások, hatan törpék: $\frac{2 \cdot 256 + 6 \cdot 128}{8} = 160$ pekhüsz magas Theodórosz apja. Hasonló számolással Theodórosz anyja $\frac{3 \cdot 256 + 5 \cdot 128}{8} = 176$ pekhüsz magas.

Theodórosz apja és apai nagyapja ugyanannyi pekhüsz magasak, ekkor viszont apai nagymamája is ugyanannyi, vagyis 160 pekhüsz. Megtaláltuk Theodórosz apjának egyetlen nem törpe férfi felmenőjét, így a többi férfi felmenője 128 pekhüsz magas. Emellett az is kiderült, hogy Theodórosz apai nagyapjának és apai nagymamájának egy-egy óriás felmenője van Theodórosz ükszülei között. Mivel a törpék felmenői mind törpék, Theodórosznak apai ágon egy-egy ükanyja óriás, ők az apai dédanyjainak az anyjai.

Theodórosz apai nagymamája nem 128 pekhüsz magas, így anyai nagymamája törpe kell legyen az egyik megadott állítás alapján. Ekkor az ő felmenői szintén mind 128 pekhüsz magasak, nincs köztük óriás.

Apai ágon Theodórosznak nincs óriás dédanyja, így anyai nagyapjának az anyja óriás, és az ő felmenői is.

Mivel Theodórosz ükszülei között anyai ágon több női, mint férfi óriás van, Theodórosz anyai nagyapjának apai nagymamája óriás.


128 128 128 256 128 128 128 256 128 256 256 256 128 128 128 128
128 192 128 192 192 256 128 128
160 160 224 128
160 176
168

C5. Egy társaság egy szobában az alábbi játékot játssza: 00-tól 99-ig mondják sorban a számokat, felváltva mindenki egyet, ám minden szám helyett csak az egyik számjegyét mondják. (A számok sorban 00, 01, 02, ..., vagyis az egyjegyű számokra is kétjegyűként tekintenek, aminek az első jegye 0.) Tehát például kezdődhet így a számolás: 0, 1, 2, 0, 4, 0, 6, 7, 8, 9, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 6, 1, 8, 1, 0, 2, stb. Ha elérik a 99-et, akkor utána az elejéről, 00-tól folytatják tovább. Peti egy ponton belépett a szobába, és egy ideig hallgatta, hogy milyen számjegyeket sorolnak. Rövid gondolkodás után rájött, hogy hol tartanak a számolásban. Legkevesebb hány számjegyet hallott Peti?

Megoldás: Petinek legalább három számjegyet kellett hallania, hogy kitalálja, hogy hol tartanak a számolásban. Először lássuk be, hogy kettő biztosan nem elég. Legyen a két hallott számjegy a és b. Ha $a = b$, akkor az a. tízesen belül bárhol tarthat a számolás. Ha $b = a + 1$ (úgy tekintve, hogy 9+1=0), akkor $a, a + 1$ és a $10 + a, 10 + (a + 1)$ is lehetett a számpár. Ha $a \neq b$ és $a \neq b - 1$, akkor ez megtörténhetett úgy is, hogy a az első szám tízes helyiértékén álló számjegye, b pedig a második szám egyes helyiértéken álló számjegye vagy fordítva (a az első egyese, b a második tízese). Ezek a számpárok tényleg léteznek, annyit kell meggondolunk, hogy valóban különböznek. Ez viszont igaz, mert az első számpárban az első szám tízes helyiértéken a áll, a második számpárban viszont az első szám tízes helyiértéke csak $b - 1$ vagy b lehet, mert a nála eggyel nagyobb számnak b a tízese (az megtörténhet, hogy tízes átlépés történt a két szám között).

Ha három számjegyet hallott, az megtörténhet, hogy elég, hiszen pl. az 1, 5, 3 esetén az első két számjegyből kitalálja, hogy csak a 14, 15 vagy 51, 52 számpárokról lehet szó, és a harmadik számjegy ismeretében tudni fogja, hogy az 51, 52, 53-nál tart a számolás.

C6. Orsi kitölt egy 5×5-ös táblázatot egyjegyű számokkal úgy, hogy a bal szélső oszlop és a felső sor egyik mezőjébe sem ír 0-t. Ezután Csenge összeolvassa minden sorban balról jobbra a számjegyeket, így kapva 5 darab ötjegyű számot, amiket összead. Ehhez hasonlóan Anett minden oszlopban összeolvassa fentről lefelé a számjegyeket, és összeadja az így kapott öt számot. Legfeljebb mennyivel kaphatott Csenge nagyobb számot, mint Anett?

Megoldás: Nézzük meg, hogy a beírt számjegyek Anett és Csenge számai közül melyikben szerepelnek nagyobb helyiértéken!

b	a	a	a	a
c	b	a	a	a
c	c	b	a	a
c	c	c	b	a
c	c	c	c	b

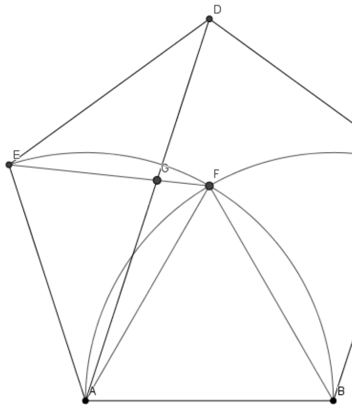
A b-vel jelölt számjegyek mindkét lány számaiban azonos helyiértéken állnak, az a-val jelölt számjegyek Anett számaiban állnak nagyobb helyiértéken, míg a c-vel jelölt számjegyek Csengénél. Ekkor a keresett különbség akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a c-vel jelölt helyeken a lehető legnagyobb számjegy szerepel, az a-val jelölt helyeken pedig a lehető legkisebb számjegy szerepel. Ez azért van, mert ha a c-vel jelölt helyeken növeljük az ott álló számjegyet, akkor Csenge számai többel nőnek, mint Anett számai, hiszen Csengénél volt nagyobb helyiértéken az adott számjegy, azaz ekkor a különbség nő, és az a-val jelölt helyeken fordítva, míg a b-vel jelölt helyeken módosítva a különbség nem változik. Tehát akkor lesz a lehető legnagyobb a különbség, ha a c-vel jelölt helyekre 9-et írunk, és az a-val jelölt helyekre 0-t, kivéve az első sorba, mert oda a legkisebb írható számjegy az 1. A b-vel jelölt helyekre bármit írhatunk, például 5-öt.

5	1	1	1	1
9	5	0	0	0
9	9	5	0	0
9	9	9	5	0
9	9	9	9	5

Ezzel a konstrukcióval elértük a maximális különbséget, ami $51111 + 95000 + 99500 + 99950 + 99995 - 59999 - 15999 - 10599 - 10059 - 10005 = 338895$.

C7. Legyen $ABCDE$ szabályos ötszög. Szerkesszük meg az A középpontú, AB sugarú és a B középpontú, szintén AB sugarú kört. Legyen F a két kör azon metszéspontja, ami az ötszög belsejében található. Legyen G az EF és az AD egyenesek metszéspontja. Hány fokos az AGE szög?

Megoldás:



Az A és B középpontokból AB sugarú kört szerkesztettünk, emiatt AB, AF és BF szakaszok egyenlő hosszúak, vagyis ABF háromszög egy szabályos háromszög. Ebből azt kapjuk, hogy $BAF\sphericalangle = 60°$.

Egy szabályos ötszög belső szöge $\frac{3\cdot 180°}{5} = 108°$, ebből azt is megtudtuk, hogy $EAF\sphericalangle = EAB\sphericalangle - BAF\sphericalangle = 48°$.

A E és F pontok A-nak azonos sugarú körén helyezkednek el, emiatt EAF egyenlőszárú háromszög és ebből egyszerűen kitudjuk számolni $FEA\sphericalangle = \frac{180° - EAF\sphericalangle}{2} = 66°$-os nagyságát.

Található egy másik egyenlőszárú háromszög az ötszögben, ez a DEA háromszög, ami miatt ki tudjuk számolni $EAD\sphericalangle$ méretét. Fentebbi egyenlőséget használva azt kapjuk, hogy $EAD\sphericalangle = \frac{180° - DEA\sphericalangle}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$.

Most már csak annyi maradt hátra, hogy $AGE\sphericalangle$-t kiszámoljuk. A háromszög szögeinek összegére vonatkozó összefüggést erre a szögre rendezzük és abból azt kapjuk, hogy:

$$AGE\sphericalangle = 180° - FEA\sphericalangle - EAD\sphericalangle = 180° - 66° - 36° = 78°$$

Az AGE szög $78°$.