kategória

D

9-12. osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2022. november 18.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK

D1. Egy ókori számológépen az alábbi 4 gomb található: $+3$, -3, $\cdot 3$, $/3$. A számológép kijelzőjén kezdetben a 21-es szám olvasható. Amikor megnyomunk egy gombot, akkor a számológép a kijelzőn látható számmal végrehajtja a kiválasztott műveletet, és a kijelzőn az eredményként kapott szám jelenik meg. Anna úgy nyomta meg egymás után a négy gombot (mindegyiket egyszer), hogy a lehető legnagyobb számot kapja, Béla pedig (szintén a 21-től indulva) úgy, hogy a lehető legkisebbet. Milyen számot kapott Anna és Béla?
Ha például a gombokat $+3$, -3, $/3$, $\cdot 3$ sorrendben nyomjuk meg, akkor az eredmény $(((21+3)-3)/3)\cdot 3 = 21$.

Megoldás: Összesen 24-féleképp tudjuk elvégezni a műveleteket, mert ennyi módon tudjuk sorba rakni őket. Az alábbiakban leírjuk az összes lehetőséget a benyomások sorrendjére (a zárójeleket elhagyva).

Ha szorzás az első művelet: $21\cdot 3/3+3-3=21$, $21\cdot 3/3-3+3=21$, $21\cdot 3+3-3/3=21$, $21\cdot 3+3/3-3=19$, $21\cdot 3-3+3/3=21$ és $21\cdot 3-3/3+3=23$.

Ha osztás az első művelet: $21/3\cdot 3+3-3=21$, $21/3\cdot 3-3+3=21$, $21/3+3\cdot 3-3=27$, $21/3+3-3\cdot 3=21$, $21/3-3+3\cdot 3=21$ és $21/3-3\cdot 3+3=15$.

Ha összeadás az első művelet: $21+3\cdot 3/3-3=21$, $21+3\cdot 3-3/3=23$, $21+3/3\cdot 3-3=21$, $21+3/3-3\cdot 3=15$, $21+3-3/3\cdot 3=21$ és $21+3-3\cdot 3/3=21$.

Ha kivonás az első művelet: $21-3\cdot 3+3/3=19$, $21-3\cdot 3/3+3=21$, $21-3+3\cdot 3/3=21$, $21-3+3/3\cdot 3=21$, $21-3/3+3\cdot 3=27$ és $21-3/3\cdot 3+3=21$.

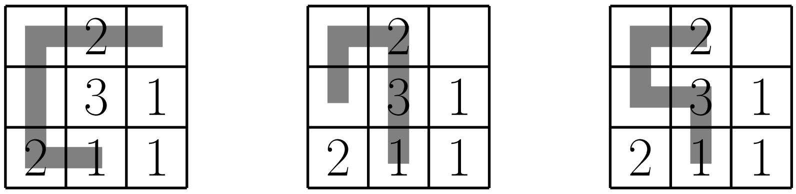
Ezek alapján látható, hogy Anna 27-et és Béla pedig 15-öt kapott.

D2. Thészeusz egy 4 × 4-es négyzetrács alakú labirintusban bolyong úgy, hogy mindig olyan mezőre lép, ami oldalszomszédos azzal, amin áll, de még nem járt rajta korábban. Miután befejezte a sétát, a labirintus térképén néhány mezőre ráírja, hogy annak hány oldalszomszédján járt. Olyan mezőkön is járhatott, amelyekre írt számot. Mi lehetett Thészeusz útvonalának a nyomvonala az alábbi jegyzet szerint? Minden lehetőséget rajzoljatok le a Válaszlapra! (A Válaszlapon több hely van, mint ahány útvonal.)

2			1
1		3	
	1	1	

Az alábbi ábrákon egy példát láthattok egy 3×3-as jegyzet esetén a három lehetséges nyomvonalra.

	2	
	3	1
2	1	1



Megoldás: Keressük meg a táblázatban azokat a mezőket, ahol biztosan járt Thészeusz, illetve azokat is, ahol biztosan nem.

A 2-es mindkét oldalszomszédján járt, és így a bal oldali oszlopban levő 1-esnek megtaláltuk az egyetlen olyan szomszédját, amit útba ejtett, tehát a másik két oldalszomszédján nem járhatott. Ezek alapján a 3-asnak kizártuk az egyik oldalszomszédos mezőjét, a másik három szomszédján tehát biztosan járt, és így az alsó sorban levő bal oldali 1-es szomszédai is rendben vannak.

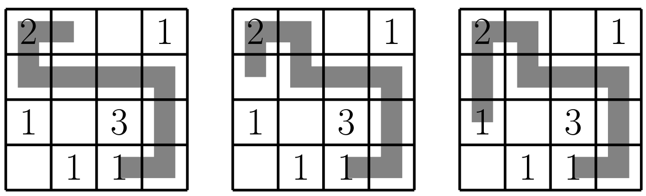
Ha a térképen O-val jelöljük, hogy hol járt biztosan Thészeusz, X-szel pedig azokat a mezőket, ahol biztosan nem, a jelenlegi információink szerint így néz ki a térképe:

2	O		1
O		O	
1	X	3	O
X	1	1	

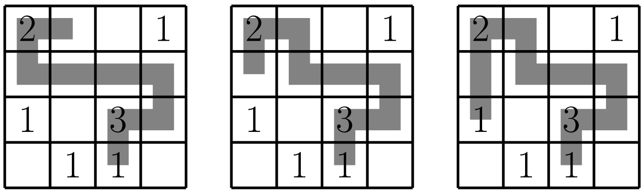
Ezután három esetet választhatunk szét aszerint, hogy az alsó sorban levő jobb oldali 1-es melyik szomszédján járt Thészeusz.

1. Ha a szomszédos egyesen járt volna, nem tudna erről a két mezőről tovább menni, pedig a fentiek alapján más mezőkön is járt, így ebben az esetben nem kapunk megoldást.

2. Ha a jobb alsó sarokban járt, akkor az az egyes, amely szerint tárgyaljuk az eseteket, az útjának az egyik végpontja. Mivel így a 3-ast tartalmazó mezőn biztosan nem járt, folytathatjuk az útvonalat felfelé, és így kiderül, hogy a jobb felső sarokban levő 1-es bal oldali szomszédján már biztosan nem járt Thészeusz. Tekintsük a négyzetrácsot felező függőleges szakaszt. Ennek mindkét oldalán van olyan mező, ahol járt Thészeusz, de csak egy helyen léphetett át. Így az útvonal két végpontja a tábla két felében van, tehát a jobb felső sarokba nem léphetett, mert az csak végpont lehetne. A táblázat bal oldalán az útvonalat háromféleképpen tudjuk befejezni úgy, hogy érintsük azokat a mezőket, ahol biztosan járt, és a szabályoknak megfelelő legyen:



3. A harmadik eset, amikor a 3-ast tartalmazó mezőn járt, ekkor szintén igaz, hogy az útjának egyik végpontja volt az az 1-es, amely szerint tárgyaljuk az eseteket. A jobb felső sarokban levő 1-es alsó szomszédján kellett járnia, hiszen vagy az alatta levő mezőről tovább kell menjen, vagy oda kell érkezzen, ha a 3-asról nem oda lép. Ekkor viszont a jobb felső sarokban levő egyes másik szomszédján nem járt, így hasonló helyzettel állunk szemben, mint az előző esetben. Nézzük a táblát felező függőleges szakaszt. Ennek mindkét oldalán vannak mezők, amelyeken járt, viszont csak egy helyen léphetett át, így a két végpont a táblázat két különböző felében van. Emiatt a jobb felső sarokban levő egyesen nem járhatott, mert az csak végpont tudna lenni. A táblázat jobb oldalán egyféleképpen tudjuk befejezni a nyomvonalat, a bal oldalon háromféleképpen:



Így a fent lerajzolt 6-féle nyomvonala lehet Thészeusz útvonalának.

D3. A Dürer verseny szervezői 6 helyszínre utaznak el a helyi forduló lebonyolításához. Ezen a versenyen összesen 62 csapat indul, és minden csapatnak pontosan 6 lapra van szüksége. A papírokat a szervezők 50-es csomagokban tárolják, és minden helyszínre csak bontatlan csomagokat tudnak vinni. Helyszínenként csak annyi csomag papírt visznek, ami már elég az ott részt vevő csapatoknak. Legfeljebb hány csomag papírra lehet szüksége a szervezőknek a helyi fordulónál? Keressétek meg az összes lehetőséget arra, hogy a csomagok maximális száma esetén melyik helyszínen hány csapat versenyezhet! A 6 helyszínen a csapatok számát csökkenő sorrendben adjátok meg. (A Válaszlapon több hely van, mint ahány helyes válasz.)
Ha például a helyszíneken 11, 2, 25, 9, 11 *és* 4 *csapat versenyez, akkor a Válaszlapon a táblázat egy oszlopába a* $25, 11, 11, 9, 4, 2$ *számsorozatot írjátok.*

Megoldás: Ha egy adott helyszínen a csapatok száma 1 és 8 között van, akkor oda 1 csomag papírt kell vinni, mivel a szükséges lapok száma $1 \cdot 6 = 6$ és $8 \cdot 6 = 48$ között van. Hasonló számolással, ha egy helysznen a csapatok száma 9 és 16 között van, akkor 2 csomag papírt kell vinni, ha a csapatok száma 17 és 25 között van, akkor 3 csomag papír kell, ha pedig legalább 26 csapat van, akkor legalább 4 csomag papírra van szükség.

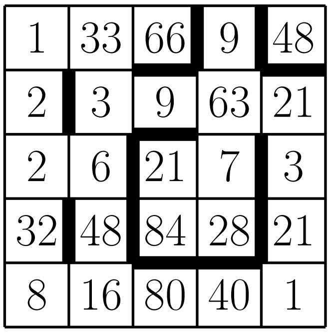
Kis próbálkozással látható, hogy előfordulhat olyan eset, amikor a szervezőknek összesen 13 csomag papírra van szükségük: Ha ugyanis az egyik helyszínen 17 csapat indul, a másik 5 helyszínen pedig 9-9 csapat, akkor valóban összesen pont $17 + 5 \cdot 9 = 62$ csapat indul. És az első helyszínen 3 csomag papírra van szükség, a maradék 5 helyszínen pedig 2-2 csomag papírra, ami összesen $3 + 5 \cdot 2 = 13$ csomag. Könnyen meggyőzhetjük magunkat arról, hogy ennél több csomag papírra semmiképp sem lesz szükség. Ha ugyanis egy helyszínen k csomag papírra van szükség, akkor ott legalább $(k-1) \cdot 50 + 1$ papírra szüksége van a versenyzőknek. Tehát ha a 6 helyszínre rendre $a_1, \dots a_6$ csomag papírt kell vinni, akkor a csapatoknak legalább $(a_1 - 1 + a_2 - 1 + \dots a_6 - 1) \cdot 50 + 6 = ((a_1 + \dots a_6) - 6) \cdot 50 + 6$ papír kell. Azt viszont tudjuk, hogy a 62 csapatnak összesen $62 \cdot 6 = 372$ lapra van szüksége. Tehát $((a_1 + \dots a_6) - 6) \cdot 50 + 6 \leq 372$ azaz $((a_1 + \dots a_6) - 6) \cdot 50 \leq 366$, ahonnan $(a_1 + \dots a_6) - 6 \leq 7$. Vagyis $a_1 + \dots a_6 \leq 13$. Mivel $a_1 + \dots a_6$ pont a szükséges papírcsomagok száma, valóban megkaptuk hogy 13-nál több csomagra nem lehet szükség.

Már van egy megoldásunk, amikor 13 csomagra van szükség, ez volt a 17,9,9,9,9,9. Vegyük észre hogy ha 8 csapatot átrakunk egy 9 csapatos helyszínről egy másik 9 csapatos helyszínre, akkor továbbra is 13 csomag papír kell. Így 13 csomag kell a 17,17,9,9,9,1 és a 17,17,17,9,1,1 esetekben is. További megoldások viszont már nincsenek. Ha ugyanis sehova sem viszünk legalább 4 csomagot, akkkor csak ezek a lehetőségek vannak. Azt pedig mindjárt belátjuk, hogy ha valahova legalább 4 csomagot viszünk, akkor nem lehet szükség 13 csomag papírra. Számolással ellenőrizhetjük, hogy $k = 1, 2$, vagy 3 csomag papír esetén $(k-1) \cdot 8 + 1$ csapat kellett legalább az adott helyszínre, viszont $k \geq 4$ esetén már legalább $(k-1) \cdot 8 + 2$ csapat kell. Azaz ha $13 = a_1 + \dots a_6$, akkor legalább $(a_1 - 1) \cdot 8 + 1 + \dots (a_6 - 1) \cdot 8 + 1 = (a_1 + \dots a_6) \cdot 8 - 6 \cdot 8 + 6 = 13 \cdot 8 - 6 \cdot 8 + 6 = 62$ csapat kell. Viszont ha valahova legalább 4 csomag papírt kellene vinnünk, akkor az előző becslésünkben arra a helyszínre +2-t is írhattunk volna, és azt kaptuk volna, hogy ekkor 13 csomaghoz már legalább 63 csapat kellene.

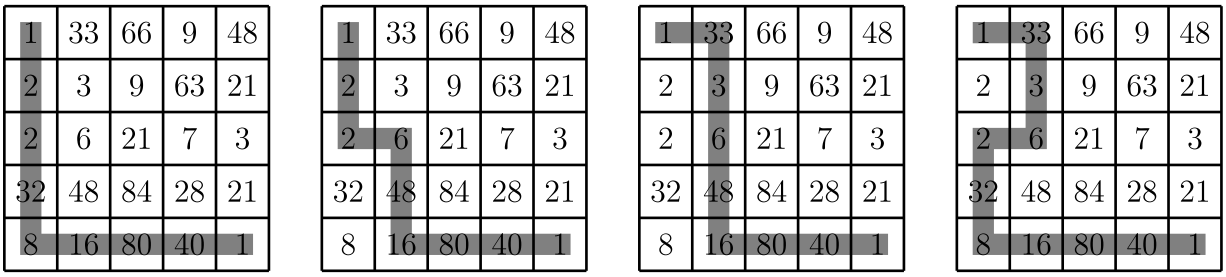
D4. Thészeusz legutóbbi kalandja után most egy 5×5-ös labirintus bal felső mezőjében találja magát. A jobb alsó mezőbe akar eljutni úgy, hogy minden lépése során egy olyan oldalszomszédos mezőbe léphet, melyben a szám osztója, vagy többszöröse a jelenlegi mezőjében lévő számnak. Keressétek meg az összes olyan utat, amelyben Thészeusz nem jár kétszer ugyanazon a mezőn! (A Válaszlapon több hely van, mint ahány lehetséges út.)

1	33	66	9	48
2	3	9	63	21
2	6	21	7	3
32	48	84	28	21
8	16	80	40	1

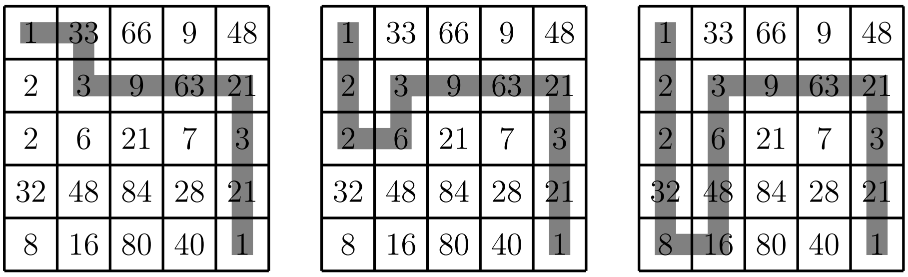
Megoldás: Vastagítsuk meg a határokat azok közt a mezők közt, ahol a két szám közt nincs osztó-többszörös viszony.



Ezek után azt kell meghatározni, hogy hány olyan út megy a bal felső sarokból a jobb alsóba, ami nem megy át egyetlen megvastagított vonalon sem. Az eseteket szét lehet szedni aszerint, hogy a jobb alsó sarokba a 40-es vagy a 21-es számon keresztül jutottunk el. A 40-es számon keresztül 4 utat lehet találni:

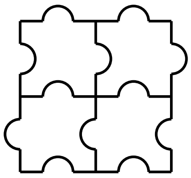


Ha a 21-es számon keresztül akarunk menni, akkor 3 utat lehet találni:



Így összesen 7 úton lehet eljutni a feltételeknek megfelelően.

D5. Egy táblázatot szeretnénk puzzle darabokból készíteni úgy, hogy sehol sem lóg egymásra két darab, és nincs rés semelyik két darab közt. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha csak olyan puzzle darabokat használhatunk, amiken két szomszédos oldalon lyuk, a másik két oldalon pedig bütyök van, amennyiben a táblázat
a) 1×4-es?
b) 4×5-ös?
A puzzle darabok mind ugyanúgy néznek ki, és minden darabnak csak az egyik lapja nézhet felfelé. Két kirakás akkor egyezik meg, ha forgatás nélkül le tudják fedni egymást. A táblázat szélén maradhat lyuk vagy bütyök. Az egyetlen feltétel az, hogy két, éllel érintkező darabnál a közös élen az egyiknek bütyke legyen, a másiknak lyuka. Az ábrán egy példa látható egy 2×2-es táblázatra.



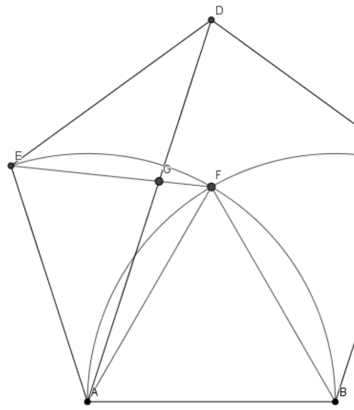
Megoldás: Ha a táblázat egyik sorának bal szélén megmondjuk, hogy lyuk vagy bütyök áll, akkor az adott sorban végig lyuk-bütyök, vagy bütyök-lyuk helyzetben állnak a darabok, és ugyanígy az oszlopoknak is elég az alján megmondani, hogy mi áll, az az egész oszlopot meghatározza. Így ha megmondjuk az összes sor bal szélén és az összes oszlop alján, hogy bütyök vagy lyuk áll, akkor az összes darab helyzete meg van határozva. Ez egy megfelelő táblázat lesz, mert minden darabon egy-egy szemközti bütyök-lyuk pár lesz, azaz két szomszédos oldalon lesz lyuk és a másik kettőn bütyök, így egyféleképpen tudjuk beforgatni az adott helyen álló darabot a megfelelő helyzetbe. Tehát ugyanannyi különböző táblázat van, ahányféleképpen eldönthetjük a sorok bal szélén és az oszlopok alján, hogy hogy állnak a darabok.

a) Itt 1 sor és 4 oszlop van, tehát 5 helyen van 2 választási lehetőségünk, így a lehetőségek száma $2^5 = 32$.

b) Itt 4 sor és 5 oszlop van, tehát 9 helyen van 2 választási lehetőségünk, így a lehetőségek száma $2^9 = 512$.

D6. Legyen $ABCDE$ szabályos ötszög. Szerkesszük meg az A középpontú, AB sugarú és a B középpontú, szintén AB sugarú kört. Legyen F a két kör azon metszéspontja, ami az ötszög belsejében található. Legyen G az EF és az AD egyenesek metszéspontja. Hány fokos az AGE szög?

Megoldás:



Az A és B középpontokból AB sugarú kört szerkesztettünk, emiatt AB, AF és BF szakaszok egyenlő hosszúak, vagyis ABF háromszög egy szabályos háromszög. Ebből azt kapjuk, hogy $BAF\sphericalangle = 60°$.

Egy szabályos ötszög belső szöge $\frac{3\cdot180°}{5} = 108°$, ebből azt is megtudtuk, hogy $EAF\sphericalangle = EAB\sphericalangle - BAF\sphericalangle = 48°$.

A E és F pontok A-nak azonos sugarú körén helyezkednek el, emiatt EAF egyenlőszárú háromszög és ebből egyszerűen kitudjuk számolni $FEA\sphericalangle = \frac{180°-EAF\sphericalangle}{2} = 66°$-os nagyságát.

Található egy másik egyenlőszárú háromszög az ötszögben, ez a DEA háromszög, ami miatt ki tudjuk számolni $EAD\sphericalangle$ méretét. Fentebbi egyenlőséget használva azt kapjuk, hogy $EAD\sphericalangle = \frac{180°-DEA\sphericalangle}{2} = \frac{180°-108°}{2} = 36°$.

Most már csak annyi maradt hátra, hogy $AGE\sphericalangle$-t kiszámoljuk. A háromszög szögeinek összegére vonatkozó összefüggést erre a szögre rendezzük és abból azt kapjuk, hogy:

$$AGE\sphericalangle = 180° - FEA\sphericalangle - EAD\sphericalangle = 180° - 66° - 36° = 78°$$

Az AGE szög 78°.

D7. Egy 100 fős görög faluban eredetileg 12 főisten és 88 ember lakott, ők az első generáció. A főistenek 100%-ban, az emberek 0%-ban istenek. Minden generációban 50 pár alakult úgy, hogy mindenkinek pontosan egy párja volt. Minden párnak lett 2 gyereke, ők alkotják a következő, szintén 100 tagból álló generációt. Minden leszármazott istenségi százaléka a két szülője istenségi százalékainak az átlaga. (Például egy 25%-ban isten és egy 12,5%-ban isten gyerekei 18,75%-ban istenek.)

a) Melyik az a legkorábbi generáció, amiben előfordulhat az, hogy ugyanannyi 100%-ban isten van, mint ahány 0%-ban isten?

b) Legfeljebb hány olyan tagja lehet az 5. generációnak, aki legalább 25%-ban isten?

Megoldás: A 100%-ban isteneket isteneknek, a 0%-ban isteneket embereknek, mindenki mást részben istennek fogok hívni.

a) Egy generációról a következőre lépve az emberek számának és az istenek számának különbsége mindig legfeljebb a (szülők közti) részben istenek számával csökken. Ha két ugyanolyan (ember, részben isten, isten) a szülő, akkor a gyerekeik is ugyanilyenek lesznek, ez nem változtat az emberek és istenek különbségén a következő generációban. Ha egy isten és egy ember a két szülő, akkor a különbség szintén nem változik, mivel két részben isten gyerekük lesz. Ha egy részben isten és egy ember vagy egy részben isten és egy isten a szülő, akkor nekik két részben isten gyerekük lesz, ekkor 1-gyel csökken, illetve nő az emberek és istenek számának különbsége. Ezért az egész generációt nézve legfeljebb a részben istenek számával csökkenhet az istenek és emberek számának különbsége.

Az 1. generációban nincsenek részben istenek, a 2. generációban csak a 12 isten összesen legfeljebb 24 gyereke lehet részben isten, a 3. generációban a 12 isten összesen legfeljebb 48 unokája lehet részben isten. Eredetileg $88 - 12 = 76$ az emberek és istenek számának különbsége, ez a következő 3 generációban legfeljebb a részben istenek számával, összesen $0 + 24 + 48 = 72$-vel csökkenhet, vagyis a 4. generációban is legalább $76 - 72 = 4$ az emberek és istenek számának különbsége. Azaz legkorábban az 5. generációban lehet ugyanannyi isten és ember. Ez lehetséges például úgy, hogy az 1. generációban 12 isten-ember pár és 38 ember-ember pár, a 2.-ban 24 félisten-ember pár és 26 ember-ember pár van, a 3.-ban 48 negyedisten-ember pár és 2 ember-ember pár van, a 4.-ben 4 nyolcadisten-ember és 46 nyolcadisten-nyolcadisten pár van. Így az 5. generációban 92 nyolcadisten és 8 tizenhatodisten lesz, vagyis ugyanannyi (0) ember és isten van ebben a generációban.

b) A szülők istenszázalékainak összege megegyezik a gyerekeik istenszázalékainak összegével, mivel egy párnak két gyereke van és mindkettejük százaléka a szülők százalékainak átlaga. Mind az 50 családban teljesül ez, így a gyerekek generációjában mindig ugyanannyi az istenszázalékok összege, mint a szüleikében. Így minden generációban ugyanannyi ez a szám. Az első generációban $12\cdot 100+88\cdot 0 = 1200$ az istenszázalékok összege, így minden generációban ennyi. Így az 5. generációban nem lehet 49 vagy több legalább 25%-ban isten, mivel akkor ez az összeg legalább $49 \cdot 25 = 1225 > 1200$ lenne, ami nem lehetséges. Így legfeljebb 48 legalább 25%-ban isten tagja lehet az 5. generációnak, ez lehetséges is: például az első két generációban 6 istenpár és 44 emberpár van, a 3.-ban 12 isten-ember pár és 38 ember-ember pár, a 4.-ben 24 félisten-ember pár és 26 ember-ember pár van, ekkor az 5. generációban 48 negyedisten és 52 ember lesz.