E1. Egy társaság egy szobában az alábbi játékot játssza: 00-tól 99-ig mondják sorban a számokat, felváltva mindenki egyet, ám minden szám helyett csak az egyik számjegyét mondják. (A számok sorban 00, 01, 02, ..., vagyis az egyjegyű számokra is kétjegyűként tekintenek, aminek az első jegye 0.) Tehát például kezdődhet így a számolás: 0, 1, 2, 0, 4, 0, 6, 7, 8, 9, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 6, 1, 8, 1, 0, 2, stb. Ha elérik a 99-et, akkor utána az elejéről, 00-tól folytatják tovább. Peti egy ponton belépett a szobába, és egy ideig hallgatta, hogy milyen számjegyeket sorolnak. Rövid gondolkodás után rájött, hogy hol tartanak a számolásban. Legkevesebb hány számjegyet hallott Peti?

Megoldás: Petinek legalább három számjegyet kellett hallania, hogy kitalálja, hogy hol tartanak a számolásban. Először lássuk be, hogy kettő biztosan nem elég. Legyen a két hallott számjegy a és b. Ha $a = b$, akkor az a. tízesen belül bárhol tarthat a számolás. Ha $b = a + 1$ (úgy tekintve, hogy 9+1=0), akkor $a, a + 1$ és a $10 + a, 10 + (a + 1)$ is lehetett a számpár. Ha $a \neq b$ és $a \neq b - 1$, akkor ez megtörténhetett úgy is, hogy a az első szám tízes helyiértékén álló számjegye, b pedig a második szám egyes helyiértéken álló számjegye vagy fordítva (a az első egyese, b a második tízese). Ezek a számpárok tényleg léteznek, annyit kell meggondolunk, hogy valóban különböznek. Ez viszont igaz, mert az első számpárban az első szám tízes helyiértéken a áll, a második számpárban viszont az első szám tízes helyiértéke csak $b - 1$ vagy b lehet, mert a nála eggyel nagyobb számnak b a tízese (az megtörténhet, hogy tízes átlépés történt a két szám között).

Ha három számjegyet hallott, az megtörténhet, hogy elég, hiszen pl. az 1, 5, 3 esetén az első két számjegyből kitalálja, hogy csak a 14, 15 vagy 51, 52 számpárokról lehet szó, és a harmadik számjegy ismeretében tudni fogja, hogy az 51, 52, 53-nál tart a számolás.

E2. Egy 100 fős görög faluban eredetileg 12 főisten és 88 ember lakott, ők az első generáció. A főistenek 100%-ban, az emberek 0%-ban istenek. Minden generációban 50 pár alakult úgy, hogy mindenkinek pontosan egy párja volt. Minden párnak lett 2 gyereke, ők alkotják a következő, szintén 100 tagból álló generációt. Minden leszármazott istenségi százaléka a két szülője istenségi százalékainak az átlaga. (Például egy 25%-ban isten és egy 12,5%-ban isten gyerekei 18,75%-ban istenek.)

a) Melyik az a legkorábbi generáció, amiben előfordulhat az, hogy ugyanannyi 100%-ban isten van, mint ahány 0%-ban isten?

b) Legfeljebb hány olyan tagja lehet az 5. generációnak, aki legalább 25%-ban isten?

Megoldás: A 100%-ban isteneket isteneknek, a 0%-ban isteneket embereknek, mindenki mást részben istennek fogok hívni.

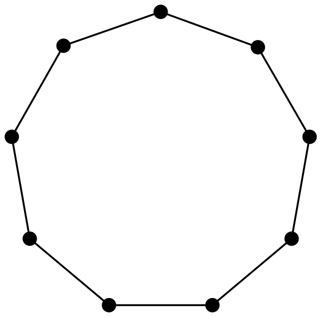
a) Egy generációról a következőre lépve az emberek számának és az istenek számának különbsége mindig legfeljebb a (szülők közti) részben istenek számával csökken. Ha két ugyanolyan (ember, részben isten, isten) a szülő, akkor a gyerekeik is ugyanilyenek lesznek, ez nem változtat az emberek és istenek különbségén a következő generációban. Ha egy isten és egy ember a két szülő, akkor a különbség szintén nem változik, mivel két részben isten gyerekük lesz. Ha egy részben isten és egy ember vagy egy részben isten és egy isten a szülő, akkor nekik két részben isten gyerekük lesz, ekkor 1-gyel csökken, illetve nő az emberek és istenek számának különbsége. Ezért az egész generációt nézve legfeljebb a részben istenek számával csökkenhet az istenek és emberek számának különbsége.

Az 1. generációban nincsenek részben istenek, a 2. generációban csak a 12 isten összesen legfeljebb 24 gyereke lehet részben isten, a 3. generációban a 12 isten összesen legfeljebb 48 unokája lehet részben isten. Eredetileg $88 - 12 = 76$ az emberek és istenek számának különbsége, ez a következő 3 generációban legfeljebb a részben istenek számával, összesen $0 + 24 + 48 = 72$-vel csökkenhet, vagyis a 4. generációban is legalább $76 - 72 = 4$ az emberek és istenek számának különbsége. Azaz legkorábban az 5. generációban lehet ugyanannyi isten és ember. Ez lehetséges például úgy, hogy az 1. generációban 12 isten-ember pár és 38 ember-ember pár, a 2.-ban 24 félisten-ember pár és 26 ember-ember pár van, a 3.-ban 48 negyedisten-ember pár és 2 ember-ember pár van, a 4.-ben 4 nyolcadisten-ember és 46 nyolcadisten-nyolcadisten pár van. Így az 5. generációban 92 nyolcadisten és 8 tizenhatodisten lesz, vagyis ugyanannyi (0) ember és isten van ebben a generációban.

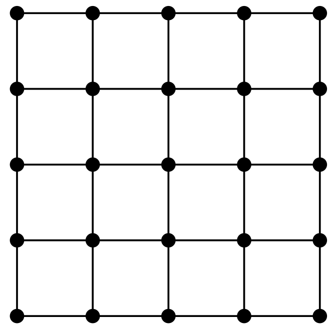
b) A szülők istenszázalékainak összege megegyezik a gyerekeik istenszázalékainak összegével, mivel egy párnak két gyereke van és mindkettejük százaléka a szülők százalékainak átlaga. Mind az 50 családban teljesül ez, így a gyerekek generációjában mindig ugyanannyi az istenszázalékok összege, mint a szüleikében. Így minden generációban ugyanannyi ez a szám. Az első generációban $12 \cdot 100 + 88 \cdot 0 = 1200$ az istenszázalékok összege, így minden generációban ennyi. Így az 5. generációban nem lehet 49 vagy több legalább 25%-ban isten, mivel akkor ez az összeg legalább $49 \cdot 25 = 1225 > 1200$ lenne, ami nem lehetséges. Így legfeljebb 48 legalább 25%-ban isten tagja lehet az 5. generációnak, ez lehetséges is: például az első két generációban 6 istenpár és 44 emberpár van, a 3.-ban 12 isten-ember pár és 38 ember-ember pár, a 4.-ben 24 félisten-ember pár és 26 ember-ember pár van, ekkor az 5. generációban 48 negyedisten és 52 ember lesz.

E3. Pitagorasz rajzolt néhány pontot a síkra, és ezek közül néhány párt összekötött egy szakasszal. Ezek után Tortillagorasz minden pont mellé akar írni egy pozitív egész számot úgy, hogy két leírt szám közül pontosan akkor osztja az egyik a másikat, ha olyan pontok mellé írta őket, amiket Pitagorasz összekötött. Meg tudja-e ezt tenni Tortillagorasz az alábbi rajzok esetében?

a)



b)



A b) részben az egy sorban vagy oszlopban lévő, de nem szomszédos csúcsok nincsenek összekötve.

Megoldás:

Jelölje az x csúcsra írt számot $k(x)$

a) Válasz: Nem lehet.

Tegyük fel indirekt, hogy tudunk a pontokra számokat írni, hogy a szomszédos pontokon lévő számok közül az egyik ossza a másikat. Ekkor irányítsuk meg a szakaszokat úgy, hogy ha egy a, b pontpárra $k(a) \mid k(b)$, akkor az (a, b) él b felé legyen irányítva.

Az ábrán egy 9 oldalú sokszög szerepel, ekkor viszont kell lennie két szomszédos szakasznak, melyek mindketten ugyanabba az irányba mutatnak. Ez viszont azt jelenti, hogy létezik három 3 egymást követő pont a, b, c, amire $k(a) \mid k(b)$, és $k(b) \mid k(c)$. Ebből következik, hogy $k(a) \mid k(c)$. Vagyis találtunk 3 pontot, hogy bármely két csúcs között van szakasz, vagyis van az ábrán egy háromszög. Viszont az ábrán láthatóan nincs háromszög, vagyis ellentmondásra jutottunk.

b) Válasz: Lehet.

Koordinátázzuk meg a pontokat úgy, hogy ha egy pont koordinátája (x, y), akkor az balról x-edik oszlopban és alulról a y-adik sorban van.

Először írjunk minden pontra páronként különböző prímeket. Az x pontra írt prímet jelölje $p(x)$ Ezután vegyük azokat a pontokat, melyeknek a koordinátaösszege páros, és az ezeken a pontokon szereplő számokat szorozzuk meg a velük szomszédos számokkal, és írjuk fel ezeket a számokat. Ez egy jó konstrukció lesz, mert:

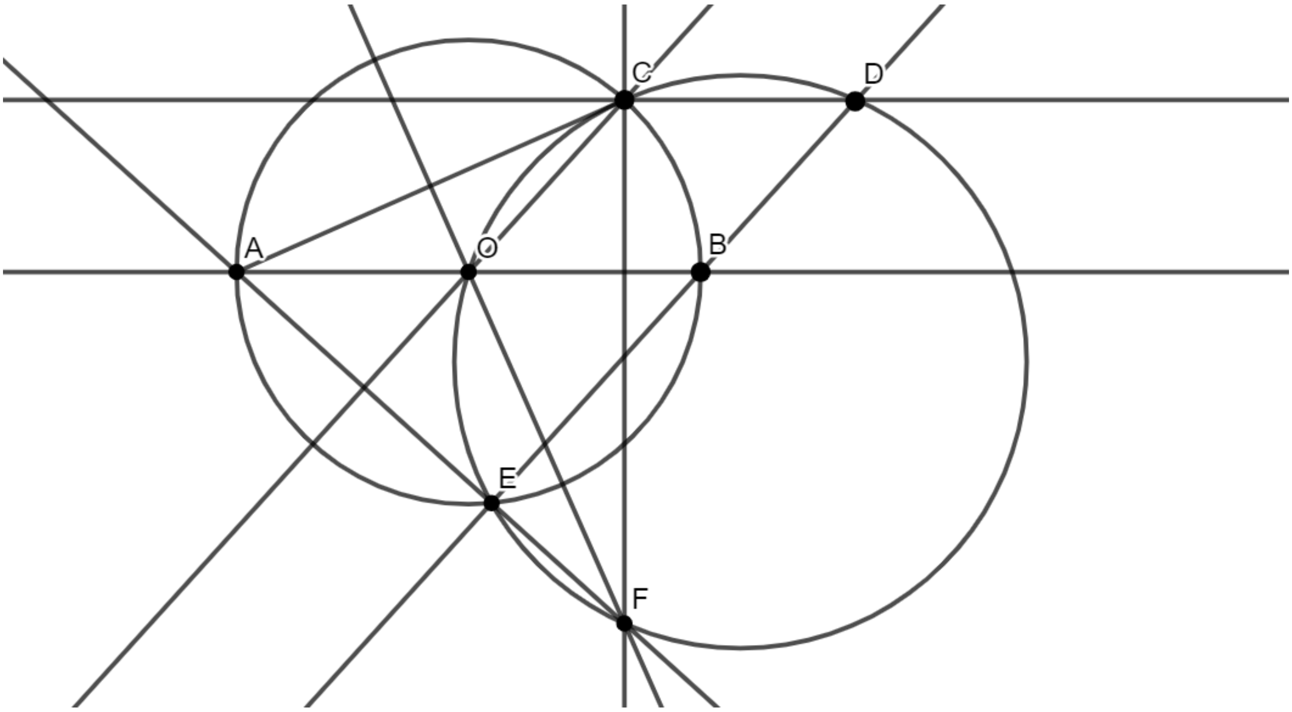
Ekkor ha a, b két páratlan koordinátaösszegű pont, akkor $k(a)$ és $k(b)$ közül egyik sem oszthatja a másikat, mert mindkét szám egy-egy prím, melyek különbözőek.

Két páros koordinátájú a, b pontra $k(a)$ és $k(b)$ közül egyik sem lehet a másiknak osztója, mert kezdetben mindkét ponthoz rendeltünk egy-egy különböző prímet, $p(a), p(b)$-t, de mivel a két pont nem szomszédos, ezért $p(a) \nmid k(b)$ és $p(b) \nmid k(a)$, így $k(a) \nmid k(b)$ és fordítva.

Egy páros koordinátaösszegű a és egy páratlan koordináta összegű b pontra, mikor lehet $k(a)$ és $k(b)$ közül egyik osztója a másiknak? $k(a)$ prímfelbontásában szerepel $p(a)$, valamint a szomszédaira írt prímek. Ez azt jelenti, hogy $k(a)$-nak van legalább 2 prímosztója, míg $k(b)$ prím, ezért csak egy prímosztója van, vagyis $k(a) \nmid k(b)$. Viszont, ha $k(b) \mid k(a)$ pontosan akkor lehet, ha $p(b) = k(b)$ szerepel prímosztóként $k(a)$ felbontásában, vagyis ha a és b szomszédosak voltak, és pont ezt akartuk belátni.

E4. Adott az O középpontú k kör, melynek AB egy átmérője. Legyen C tetszőleges pont a k körön, mely különböző A-tól és B-től. Jelölje D azt a pontot, melyre O, B, D, és C egy paralelogramma négy csúcsa ilyen sorrendben. Legyen a BD egyenes és k metszéspontja E, illetve az OAC háromszög magasságpontja F. Bizonyítsátok be, hogy O, D, E, C és F pontok mind egy körre illeszkednek.

Megoldás:



Thalesz tételének megfordítása miatt elég belátni, hogy az FD szakaszból az O, E, C pontok derékszögben látszanak, hiszen ekkor mind az öt pont rajta van az FD átmérőjű körön.

Tudjuk, hogy AF magasságvonal az AOC háromszögben, így AF merőleges CO-ra. De mivel $OCDB$ paralelogramma, ezért CO és DB párhuzamosak, vagyis DB is merőleges AF-re. De ahogy DBE kollineáris, úgy a Thalesz-tétel megfordítása miatt AEF is kollineáris. Ez pedig azt jelenti, hogy a DEF szög tényleg derékszög.

Tudjuk, hogy CF magasságvonal az AOC háromszögben, így CF merőleges AO-ra. De mivel $OCDB$ paralelogramma, ezért AO és CD párhuzamosak, vagyis CD is merőleges CF-re. Ez pedig azt jelenti, hogy DCF szög tényleg derékszög.

Mivel OB és OC hossza is a kör sugara, így azonos hosszúak. Viszont ekkor $OCDB$ olyan paralelogramma, hogy a szomszédos oldalak azonos hosszúak, tehát $OCDB$ rombusz. Neki az átlói merőlegesek egymásra, tehát BC és OD merőlegesek. Mivel AB átmérő k-ban, ezért BC merőleges AC-re is, tehát AC és OD párhuzamosak. Viszont FO magasságvonal az AOC háromszögben, ezért FO merőleges AC-re. Ekkor viszont AC és OD párhuzamossága miatt FO merőleges OD-re is, vagyis DOF is derékszög. Ezzel pedig mindhárom merőlegességet beláttuk, amivel befejeztük a bizonyítást.

E5. Legyen $n \geq 3$ egy egész szám. Zsófi gondolt n darab különböző valós számra, majd leírta azokat a számokat, amelyeket elő tudott állítani két különböző gondolt szám szorzataként. Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám lehet a leírt számok között (n-től függően)?

Megoldás: Jelölje A azoknak a számoknak a halmazát, amire Zsófi gondolt, B pedig azon számok halmazát, amelyeket elő tudott állítani két különböző A-beli szám szorzataként. Vegyük a B halmaz pozitív prím elemeit, és mindegyik $p \in B$ prímhez jelöljünk ki egy (x, y) párt az A halmazból, melyre $xy = p$. Ezután vegyük a következő gráfot: legyenek a csúcsai az A halmaz elemei, és x és y csúcsa között pontosan akkor fusson él, ha (x, y) egy, az előbb kijelölt pár. A továbbiakban ezt a gráfot G-vel fogjuk jelölni. Nyilván G-nek éppen annyi éle lesz, ahány eleme B-nek, hiszen B minden eleméhez találunk pontosan egy élet G-ben, mely annak az elemnek felel meg.

Egy gráfban sétának nevezünk csúcsok és élek egy váltakozó sorozatát (amely csúccsal kezdődik és csúccsal ér véget), melyre bármely szomszédos él-csúcs párra igaz, hogy az adott él az adott csúcsból fut ki. Zártnak nevezünk egy sétát, ha a kezdő és a végcsúcs megegyezik. A séta hossza pedig legyen a séta során használt élek száma (vagyis minden élt annyiszor számolunk, ahányszor végigmentünk rajta a séta során).

Azt állítjuk, hogy G-ben nincs olyan páros hosszú zárt séta, melynek van olyan éle, amin csak egyszer mentünk végig. Tegyük fel indirekten ugyanis, hogy létezik ilyen, és legyenek ennek a sétának a csúcsai rendre $c_0, c_1, c_2 \dots c_{2n}$, ahol $c_0 = c_{2n}$. Legyenek továbbá $x_0, x_1, x_2 \dots x_{2n}$ rendre azok az A-beli számok, melyek a $c_0, c_1, c_2 \dots c_{2n}$ csúcsokhoz tartoznak (így $x_0 = x_{2n}$). Mivel $c_i c_{i+1}$ él a G gráfban, így $x_i \cdot x_{i+1}$ prím minden $0 \leq i < 2n$-re. Vegyük az $\prod_{i=1}^{2n} x_i$ szorzatot. Ezt fogjuk kétféleképpen felírni:

$$\prod_{i=1}^{2n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_{2i-1} \cdot x_{2i} = \prod_{i=0}^{n-1} x_{2i} \cdot x_{2i+1}.$$

Mivel tudjuk, hogy x_i és x_{i+1} szorzata mindig prím, így $\prod_{i=1}^{n} x_{2i-1} \cdot x_{2i}$ és $\prod_{i=0}^{n-1} x_{2i} \cdot x_{2i+1}$ is n darab (nem feltétlenül különböző, hiszen a séta során akár többször is léphettük ugyanarra az élre) prím szorzata. Azonban feltettük, hogy van olyan éle a zárt sétának, amelyen csak egyszer mentünk végig, így az a prím csak az egyik szorzatban fog szerepelni. Ez azonban ellentmond a számelmélet alaptételének, hiszen ezzel a prímmel az egyik szorzat osztható, a másik viszont nem.

Most be fogjuk látni, hogy G-nek legfeljebb n éle lehet. Bebizonyítjuk ugyanis, hogy ha G tartalmaz legalább $n + 1$ élet, akkor tartalmaz olyan páros hosszú zárt sétát, amelyben van olyan él, amin csak egyszer mentünk végig. Tegyük fel tehát indirekten, hogy G-nek legalább $n + 1$ éle van. Ekkor vegyük egy olyan összefüggőségi komponensét, melyben legalább eggyel több él van, mint csúcs. Ilyet mindig találunk, hiszen máskülönben minden összefüggőségi komponensben legfeljebb annyi él van, mint ahány csúcs, ekkor azonban az egész G gráfra is igaz lenne, hogy legfeljebb annyi éle van, mint ahány csúcsa. Így feltehető, hogy G összefüggő.

Az világos, hogy G nem tartalmaz páros hosszú kört, hiszen ekkor ennek az élei mentén végigmenve páros hosszú zárt sétát kapnánk, melynek minden élén egyszer megyünk végig. Mivel azonban G-nek több mint $n - 1$ éle van, így tartalmaz kört (ismert ugyanis, hogy az n csúcsú körmentes összefüggő egyszerű gráfoknak pontosan $n - 1$ éle van). Legyenek ennek a körnek a csúcsai $c_0, c_1, c_2 \dots c_n$, ahol $c_0 = c_n$. Töröljük a gráfból a $c_0 c_1$ élet. A körnek tetszőleges élét elvéve G továbbra is összefüggő marad, és még mindig több mint $n - 1$ éle lesz, vagyis találunk egy másik kört. Legyenek ennek a csúcsai $b_0, b_1 \dots b_k$, ahol $b_0 = b_k$. Mivel G a $c_0 c_1$ él törlése után is összefüggő maradt, így találunk egy sétát c_0 és b_0 között, legyenek ennek csúcsai $c_0 = a_0, a_1, \dots a_m = b_0$. Mivel tudjuk, hogy G nem tartalmaz páros kört, így n, k páratlan. Vegyük a következő zárt sétát:

$$c_0, c_1 \dots c_n = c_0 = a_0, a_1 \dots a_m = b_0, b_1 \dots b_k = b_0 = a_m, a_{m-1}, \dots a_0 = c_0.$$

Az egyrészt világos, hogy ez valóban egy zárt séta, másrészt éppen $n+m+k+m$ élet tartalmaz, így páros hosszú. Tudjuk, azonban, hogy a c_0c_1 élen csak egyszer mentünk végig a séta során, hiszen a második kör, és a két kört összekötő utat is egy olyan gráfból vettük, amelyből már töröltük c_0c_1-et. Így valóban egy olyan páros hosszú zárt sétát kaptunk, amelynek van olyan éle, amin csak egyszer mentünk végig, ami azonban nem lehetséges.

Ezzel beláttuk, hogy G-nek legfeljebb n éle lehet, így a B halmaz nem tartalmazhat több, mint n elemet. Nem maradt más hátra, mint konstruálni egy A halmazt úgy, hogy a hozzá tartozó B legalább n elemből álljon.

Legyenek $p_1, p_2 \dots p_n$ az első n darab prím felsorolása. Legyenek A elmei a következők: $x_1 = \frac{\sqrt{p_3p_2}}{\sqrt{p_1}}, x_2 = \frac{\sqrt{p_1p_3}}{\sqrt{p_2}}$ valamint $x_3 = \frac{\sqrt{p_1p_2}}{\sqrt{p_3}}$. Innentől rekurzívan definiáljuk A halmaz további elemeit: legyen $n-1 \geq k \geq 3$ esetén $x_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{x_k}$. (Mivel semelyik x_k sem 0, így a rekurzív formula valóban értelmes). Így az $x_2 \cdot x_3, x_3 \cdot x_1, x_1 \cdot x_2$ valamint $x_3 \cdot x_4, x_4 \cdot x_5 \dots x_{n-1} \cdot x_n$ szorzatok éppen a $p_1, p_2 \dots p_n$ prímek, vagyis legfeljebb n különböző pozitív prím szerepelhet a B halmazban.