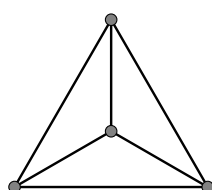




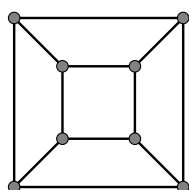
1. Határozzátok meg azokat a pozitív egész n számokat, melyekre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor > 2\sqrt{n}$.

Egy k valós számra $\lfloor k \rfloor$ a k szám egészrészét jelöli, azaz a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb k -nál.

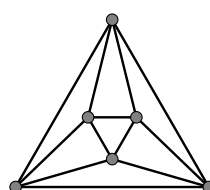
2. Egy G gráfot nevezzünk *osztós*nak, ha lehet a csúcsaira úgy páronként különböző pozitív egész számokat írni, hogy bármely két csúcsra teljesüljön az, hogy pontosan akkor osztója az egyik a másiknak, ha G -ben él fut közöttük. Mely szabályos testek élgráfjai osztósak?



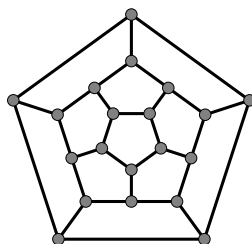
tetraéder



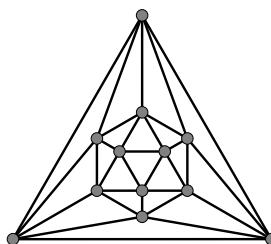
hexaéder



oktaéder



dodekaéder



ikozaéder

3. Legyen $n \geq 3$ egy egész szám, valamint A a valós számok egy n elemű részhalmaza. Jelölje B azon valós számok halmazát, amelyek előállnak $x \cdot y$ alakban, ahol $x, y \in A$ és $x \neq y$. Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám szerepelhet a B halmazban (n -től függően)?

4. Adott egy $0^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ szög, és egy körlemez. Egy hangya a körlemez egy belső pontjából indul, valamilyen irányban egyenesen haladva. Ezek után a következőképpen mozog: mindig egyenesen mozog, amíg el nem éri a lemez szélét. Ekkor φ szöget fordul az óramutató járásával megegyező irányban. Amennyiben ez az új irány nem a lemez belseje felé mutat, újból fordul φ szöget, és ezt egészen addig ismétli, amíg a lemez belseje felé nem néz. Ezek után ebbe az irányba folytatja az útját. Mely φ szögek esetén igaz, hogy a hangya minden indulási pozíció és irány esetén visszaér valamikor az indulási pozíciójába?

5. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D , E és F rendre az A , B és C csúcsból induló magasságvonal talppontja. Jelölje A' , B' és C' rendre az A , B és C csúcsok merőleges vetületeit az EF , FD és DE egyenesekre. Továbbá legyenek a $DB'C'$, $EC'A'$ és $FA'B'$ háromszögek magasságpontjai rendre a H_D , H_E és H_F pontok. Mutassátok meg, hogy

$$H_D B^2 + H_E C^2 + H_F A^2 = H_D C^2 + H_E A^2 + H_F B^2.$$

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerephető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!