E+1. Határozzátok meg azokat a pozitív egész n számokat, melyekre $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor > 2\sqrt{n}$.

Egy k valós számra $\lfloor k\rfloor$ a k szám egészrészét jelöli, azaz a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb k-nál.

Megoldás:

Válasz:

Az $x(x+1)$ és $x(x+2)$ alakú számok, ahol x tetszőleges pozitív egész szám.

Indoklás:

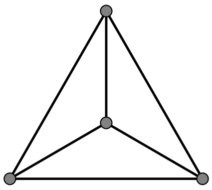
Jelöljük $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$-t s-sel, s pozitív egész szám. Ekkor $s \le \sqrt{n} < s+1$, így $s^2 \le n < (s+1)^2 = s^2+2s+1$. Mivel n és s egész számok, ebből $n \le s^2+2s = s(s+2)$, így $s^2 \le n \le s(s+2)$. $\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = \lfloor\frac{n}{s}\rfloor$. Azon n pozitív egész számokat keressük, amelyekre $s + \lfloor\frac{n}{s}\rfloor > 2\sqrt{n}$. Két eset van aszerint, hogy s osztja-e n-t.

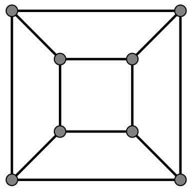
Amennyiben s osztja n-t, $s^2 \le n \le s(s+2)$ miatt $n = s^2$, $n = s(s+1)$ vagy $n = s(s+2)$. Ezek közül az elsőre $\sqrt{n} = s = \lfloor\sqrt{n}\rfloor = \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor$, így $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = 2\sqrt{n}$, egyenlőség van. Ha $n = s(s+1)$, $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ valóban s és $\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = \lfloor\frac{s(s+1)}{s}\rfloor = s+1$. Ekkor $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = s+(s+1) = 2s+1 = \sqrt{4s^2+4s+1}$ és $2\sqrt{n} = \sqrt{4s^2+4s}$, így $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor > 2\sqrt{n}$ az $s(s+1)$ alakú számokra, ahol s pozitív egész szám. Ha $n = s(s+2)$, $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ valóban s és $\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = \lfloor\frac{s(s+2)}{s}\rfloor = s+2$. Ekkor $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = s+(s+2) = 2s+2 = \sqrt{4s^2+8s+4}$ és $2\sqrt{n} = \sqrt{4s^2+8s}$, így $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor > 2\sqrt{n}$ az $s(s+2)$ alakú számokra is, ahol s pozitív egész szám. (Mindkét esetben használjuk, hogy pozitív valós számok közül az a nagyobb, amelyiknek a négyzete nagyobb.)

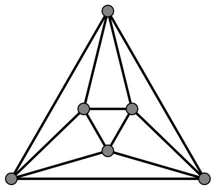
Amennyiben s nem osztja n-t, $s^2 \le n \le s(s+2)$ miatt $s^2 < n < s(s+1)$ vagy $s(s+1) < n < s(s+2)$. Az első esetben $\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = \lfloor\frac{n}{s}\rfloor = s$, így $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = s+s = 2s$, míg $s^2 < n$. Ekkor $s < \sqrt{n}$, tehát $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = 2s < 2\sqrt{n}$. A második esetben $\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = \lfloor\frac{n}{s}\rfloor = s+1$, így $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = s+(s+1) = 2s+1$, míg $s^2+s < n$ miatt $(s+0,5)^2 = s^2+s+0,25 < n$, ugyanis s^2+s és n is egész számok. Ekkor $s+0,5 < \sqrt{n}$, tehát $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor = 2s+1 < 2\sqrt{n}$. Így ha s nem osztja n-t, a jobb oldal, $2\sqrt{n}$ a nagyobb.

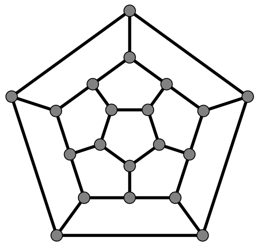
Összefoglalva s helyett x-szel és y-nal megfogalmazva, pozitív egész n-re $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor > 2\sqrt{n}$ pontosan akkor teljesül, hogyha $n = x(x+1)$ valamely x pozitív egész számra vagy $n = y(y+2)$ valamely y pozitív egész számra.

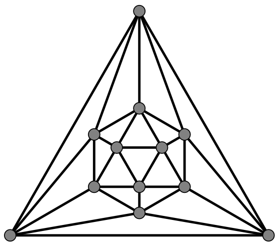
E+2. Egy G gráfot nevezzünk *osztósnak*, ha lehet a csúcsaira úgy páronként különböző pozitív egész számokat írni, hogy bármely két csúcsra teljesüljön az, hogy pontosan akkor osztója az egyik a másiknak, ha G-ben él fut közöttük. Mely szabályos testek élgráfjai osztósak?


tetraéder


hexaéder


oktaéder


dodekaéder


ikozaéder

Megoldás: Fogalmazzuk át a feladatot irányított gráfokkal foglalkozó feladattá! Egy véges gráf pontosan akkor osztós, ha lehet az éleit úgy irányítani, hogy az pontosan egy részbenrendezett halmaz relációit mutassa be. Az első megfigyelésünk az, hogy nem lehet egy legalább 5 hosszúságú páratlan kör feszített részgráfként egy osztós gráfban, hiszen ekkor lenne két egymást követő él ugyanarra irányítva, amiből a tranzitivitás miatt következne egy harmadik, a körben nem szereplő él.

Most egyesével megválaszoljuk az eseteket:

- **Tetraéder:** A csúcsokra különböző kettőhatványokat írva kaphatunk egy konstrukciót.
- **Hexaéder:** Ez egy páros gráf, osszuk a csúcsokat két osztályba úgy, hogy az osztályokon belül ne fusson él. Az egyik osztályba tartozó négy csúcsra írjunk négy különböző prímszámot, a másik osztályban pedig minden csúcsra kerüljön annak a három prímnek a szorzata, amelyekhez tartozó csúccsal össze van kötve.
- **Oktaéder:** Ha az oktaédert a csúcsára állítjuk, akkor a középső szinten van egy négyzet, alatta és felette pedig egy-egy további csúcs. A négyzetet ki tudjuk tölteni például rendre a $2, 12, 3, 18$ számokkal. A maradék két csúcsra írjunk $36 \cdot 5 = 180$-at és $36 \cdot 7 = 252$-t. Így a középső szinten lévő minden szám osztani fogja az alsó és felső csúcsokon álló számot, de azok egymást nem.
- **Dodekaéder:** Ezt nem lehet kitölteni, mert egy lapját határoló 5 csúcs egy ötszöget alkot feszített részgráfként.
- **Ikozaéder:** Az ikozaéder gráfja sem osztós, mert az egyik csúcs 5 szomszédja ismételten egy ötszöget alkot feszített részgráfként.

E+3. Legyen $n \geq 3$ egy egész szám, valamint A a valós számok egy n elemű részhalmaza. Jelölje B azon valós számok halmazát, amelyek előállnak $x \cdot y$ alakban, ahol $x, y \in A$ és $x \neq y$. Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám szerepelhet a B halmazban (n-től függően)?

Megoldás: Vegyük a B halmaz prím elemeit, és mindegyik $p \in B$ prímhez jelöljünk ki egy (x, y) párt az A halmazból, melyre $xy = p$. Ezután vegyük a következő gráfot: legyenek a csúcsai az A halmaz elemei, és x és y csúcsa között pontosan akkor fusson él, ha (x, y) egy, az előbb kijelölt pár. A továbbiakban ezt a gráfot G-vel fogjuk jelölni. Nyilván G-nek éppen annyi éle lesz, ahány eleme B-nek, hiszen B minden eleméhez találunk pontosan egy élet G-ben, mely annak az elemnek felel meg.

Azt állítjuk, hogy G-ben nincs olyan páros hosszú zárt séta, melynek van olyan éle, amin csak egyszer mentünk végig. Tegyük fel inderekten ugyanis, hogy létezik ilyen, és legyenek ennek a sétának a csúcsai rendre $c_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}$, ahol $c_0 = c_{2n}$. Legyenek továbbá $x_0, x_1, x_2 \ldots x_{2n}$ rendre azok az A-beli számok, melyek a $c_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ csúcsokhoz tartoznak (így $x_0 = x_{2n}$). Mivel $c_i c_{i+1}$ él a G gráfban, így $x_i \cdot x_{i+1}$ prím minden $0 \leq i < 2n$-re. Vegyük az $\prod_{i=1}^{2n} x_i$ szorzatot. Ezt fogjuk kétféleképpen felírni:

$$\prod_{i=1}^{2n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_{2i-1} \cdot x_{2i} = \prod_{i=0}^{n-1} x_{2i} \cdot x_{2i+1}.$$

Mivel tudjuk, hogy x_i és x_{i+1} szorzata mindig prím, így $\prod_{i=1}^{n} x_{2i-1} \cdot x_{2i}$ és $\prod_{i=0}^{n-1} x_{2i} \cdot x_{2i+1}$ is n darab (nem feltétlenül különböző, hiszen a séta során akár többször is léphettük ugyanarra az élre) prím szorzata. Azonban feltettük, hogy van olyan éle a zárt sétának, amelyen csak egyszer mentünk végig, így az a prím csak az egyik szorzatban fog szerepelni. Ez azonban ellentmond a számelmélet alaptételének, hiszen ezzel a prímmel az egyik szorzat osztható, a másik viszont nem.

Most be fogjuk látni, hogy G-nek legfeljebb n éle lehet. Bebizonyítjuk ugyanis, hogy ha G tartalmaz legalább $n+1$ élet, akkor tartalmaz olyan páros hosszú zárt sétát, amelyben van olyan él, amin csak egyszer mentünk végig. Tegyük fel tehát indirekten, hogy G-nek legalább $n+1$ éle van. Ekkor vegyük egy olyan összefüggőségi komponensét, melyben legalább eggyel több él van, mint csúcs. Mivel ilyet mindig találunk, feltehető, hogy G összefüggő.

Az világos, hogy G nem tartalmaz páros hosszú kört, hiszen ekkor ennek az élei mentén végigmenve páros hosszú zárt sétát kapnánk, melynek minden élén egyszer megyünk végig. Mivel azonban G-nek több, mint $n-1$ éle van, így tartalmaz kört. Legyenek ennek a körnek a csúcsai $c_0, c_1, c_2 \ldots c_n$, ahol $c_0 = c_n$. Töröljük a gráfból a $c_0 c_1$ élet. A körnek tetszőleges élét elvéve G továbbra is összefüggő marad, és még mindig több mint $n-1$ éle lesz, vagyis találunk egy másik kört. Legyenek ennek a csúcsai $b_0, b_1 \ldots b_k$, ahol $b_0 = b_k$. Mivel G a $c_0 c_1$ él törlése után is összefüggő maradt, így találunk egy sétát c_0 és b_0 között, legyenek ennek csúcsai $c_0 = a_0, a_1, \ldots a_m = b_0$. Mivel tudjuk, hogy G nem tartalmaz páros kört, így n, k páratlan. Vegyük a következő zárt sétát:

$$c_0, c_1 \ldots c_n = c_0 = a_0, a_1 \ldots a_m = b_0, b_1 \ldots b_k = b_0 = a_m, a_{m-1}, \ldots a_0 = c_0.$$

Az egyrészt világos, hogy ez valóban egy zárt séta, másrészt éppen $n + m + k + m$ élet tartalmaz, így páros hosszú. Tudjuk, azonban, hogy a $c_0 c_1$ élen csak egyszer mentünk végig a séta során, hiszen a második kör, és a két kört összekötő utat is egy olyan gráfból vettük, amelyből már töröltük $c_0 c_1$-et. Így valóban egy olyan páros hosszú zárt sétát kaptunk, amelynek van olyan éle, amin csak egyszer mentünk végig, ami azonban nem lehetséges.

Ezzel beláttuk, hogy G-nek legfeljebb n éle lehet, így a B halmaz nem tartalmazhat több, mint n darab prím elemet. Nem maradt más hátra, mint konstruálni egy A halmazt úgy, hogy a hozzá tartozó B legalább n prím elemet tartalmazzon.

Legyenek $p_1, p_2 \ldots p_n$ az első n darab prím felsorolása. Legyenek A elemei a következők: $x_1 = \frac{\sqrt{p_3 p_2}}{\sqrt{p_1}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{p_1 p_3}}{\sqrt{p_2}}$ valamint $x_3 = \frac{\sqrt{p_1 p_2}}{\sqrt{p_3}}$. Innentől rekurzívan definiáljuk az A halmaz további elemeit:

legyen $n-1 \geq k \geq 3$ esetén $x_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{x_k}$. (Mivel semelyik x_k sem 0, így a rekurzív formula valóban értelmes). Így az $x_2 \cdot x_3, x_3 \cdot x_1, x_1 \cdot x_2$ valamint $x_3 \cdot x_4, x_4 \cdot x_5 \ldots x_{n-1} \cdot x_n$ szorzatok éppen a $p_1, p_2 \ldots p_n$ prímek, vagyis legfeljebb n különböző pozitív prím szerepelhet a B halmazban.

E+4. Adott egy $0^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ szög, és egy körlemez. Egy hangya a körlemez egy belső pontjából indul, valamilyen irányban egyenesen haladva. Ezek után a következőképpen mozog: mindig egyenesen mozog, amíg el nem éri a lemez szélét. Ekkor φ szöget fordul az óramutató járásával megegyező irányban. Amennyiben ez az új irány nem a lemez belseje felé mutat, újból fordul φ szöget, és ezt egészen addig ismétli, amíg a lemez belseje felé nem néz. Ezek után ebbe az irányba folytatja az útját. Mely φ szögek esetén igaz, hogy a hangya minden indulási pozíció és irány esetén visszaér valamikor az indulási pozíciójába?

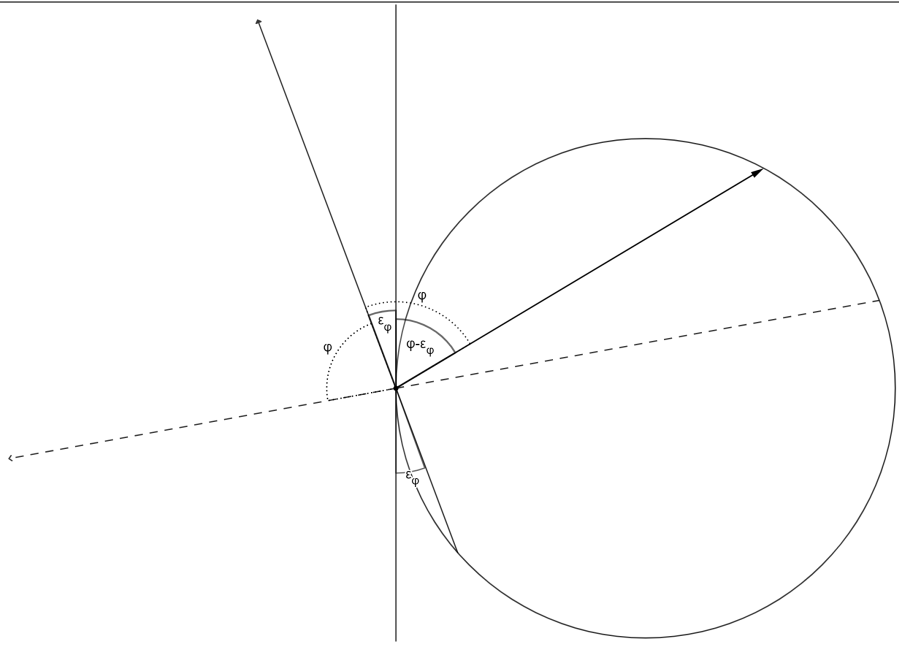
Megoldás: A válasz az, hogy kizárólag $\varphi = 90^\circ$ és $\varphi = 180^\circ$ esetén esetén ér a hangya mindig vissza az indulási pozíciójába. A második esetben amint útja során először eléri a körlemez szélét, ugyanazon a húron, amin addig közlekedett, indul el visszafelé, így mielőtt másodszorra elérné a lemez szélét, visszaér bármilyen indulási pozíció és irány esetén. Amennyiben $\varphi = 90^\circ$, két esetet különböztetünk meg az alapján, hogy egyszer vagy kétszer fordul, mikor először ér a lemez szélére. Többször nem fordulhat, mivel a második fordulásánál abba az irányba, amerről érkezett, továbbindulna, hiszen az a lemez belseje felé mutat.

Az első esetben vegyük azt a körlemezbe írt téglalapot, melynek oldala az a húr ami az indulási irányával párhuzamos és tartalmazza az indulási helyét. Ekkor a hangya az útja során csak és kizárólag ennek a téglalapnak az oldalain mozoghat, hiszen az indulásnál így közlekedik amíg a lemez szélét el nem éri, és ott 90° vagy 180°-t fordul az óramutató járásának megfelelő irányba, ezért az új húr, amin mozogni fog, is oldala annak a téglalapnak. Viszont az első csúcs elérése után negatív körüljárási irányba fog haladni a téglalap csúcsain, így vissza fog érkezni az indulási helyére. A második esetben az első fordulása után visszaér szintén.

Következőnek belátjuk, hogy ha φ nem 90° vagy 180°, akkor van olyan indulási pozíció és irány, hogy a hangya soha nem ér vissza az indulási pozíciójába. Ezt indirekt módon tesszük: tegyük fel hogy egy ilyen φ-re minden indulási pozíció és irány esetén visszaér a kezdő pozíciójába.

Vegyük észre, hogy egymástól különböző húrok legfeljebb egy pontban metszik egymást és hogy egy húron megszámlálhatatlanul végtelen sok pont van és hogy a hangya által bejárt húrok megszámlálhatóan sokan vannak. Egy indulási pozíció és irányt ha ki tudnánk választani, ahol nem járna újból ugyanazon a húron a hangya többször, akkor az indulási húron lenne pont, amit többször nem érintene, így az indirekt feltevésünknek ellent mondana. Tehát a feltevésünk alapján erre a φ-re minden indulási pozíció és irány esetén a hangya az útja során valamikor visszatér ugyanarra a húrra.

Mivel végtelen sokszor visszatér az indulási húrra, lesz kettő olyan eset, amikor ugyanolyan irányban halad rajta végig. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel hogy az n. húrként jár újra először az indulási húron a hangya, és hogy ekkor ugyanolyan irányban halad rajta végig mint eredetileg. Ekkor látható, hogy az $(n + k)$. húr amin jár egyezik az $(1 + k)$. húrral amin jár, hiszen ugyanazon a húron járva mindig ugyanarra a húrra fog áttérni következőnek. Viszont emiatt mindig mikor az első húrra visszatér, ugyanarról az előtte lévő húrrol tér vissza az útja során. Így ha tudunk mutatni egy olyan második húrt, amire két lehetséges indulási húrról is tudna a hangya közvetlen áttérni, ellentmondásra jutunk, hiszen azok közül legfeljebb az egyiken járhat a hangya újra (azon, amelyik a második húrról induló ciklusban az utolsó), viszont a másikról indulási húrról kiindulva a ciklusba kerülünk és így többször nem járunk azon az indulási húron.



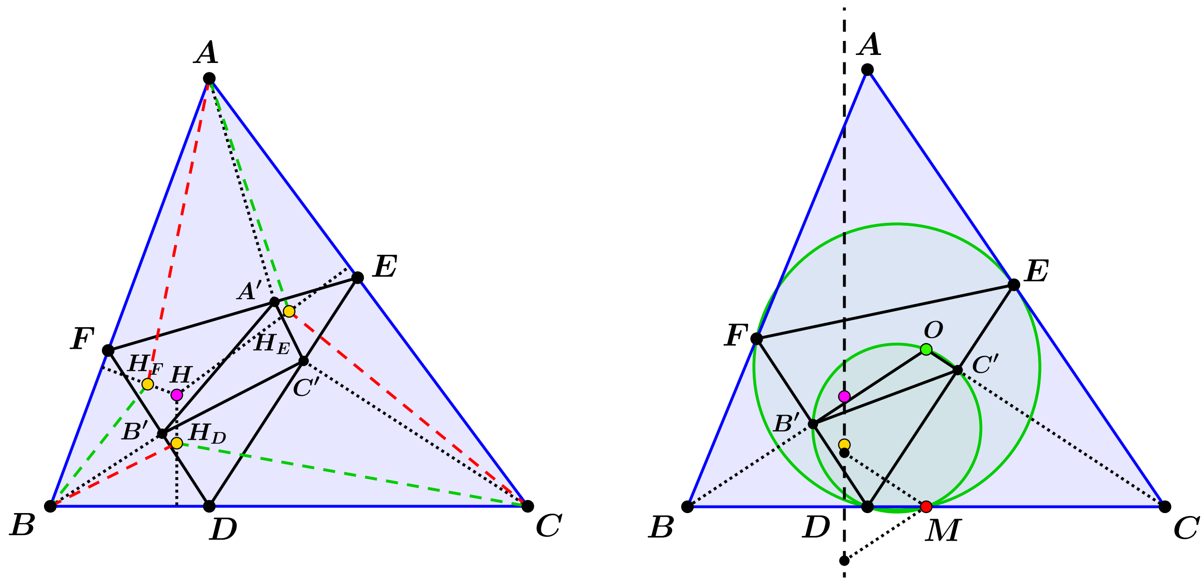
A lemez szélének egy tetszőleges pontjából húzzuk be az érintőt és arra mérjük fel az ábrán látható szögeket, ahol ε_φ megfelelően kicsi. Az ábra hasonlóan fog kinézni mint az itt szereplő (kivéve hogy a szaggatott és a vektor húrok egyezhetnek illetve szerepelhetnek más relatív sorrendben) amennyiben $\varphi-\varepsilon_\varphi$, ε_φ és φ pozitívak és $\varepsilon_\varphi+\varphi<180°$. Például $\varepsilon_\varphi=\min\left(\frac{\varphi}{2},\frac{180°-\varphi}{2}\right)$ működik. Ez esetben látható, hogy akár a szaggatott vonallal jelzett, akár a sima vonallal jelzett húrról indul el a hangya a választott pont felé, mindkét esetben a vektorként szereplő húron fog a lemezen belül továbbhaladni következőnek. Ellentmondásra jutottunk, ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés: Az indirekt gondolatmenet 90°-ra azért nem működik, mert ez az eset amikor a szaggatott vonallal és a vektorként szerplő húrok megegyeznek, avagy amikor az indulási húron egyből visszafordul a hangya és visszaér. Azaz a fentebbi indoklásban az indulási húr, amiről többször nem tér át közvetlen a második húrra, megegyezik a második húrra. Ez azonban csak akkor történik meg ha $2\varphi=180°$.

E+5. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D, E és F rendre az A, B és C csúcsból induló magasságvonal talppontja. Jelölje A', B' és C' rendre az A, B és C csúcsok merőleges vetületeit az EF, FD és DE egyenesekre. Továbbá legyenek a $DB'C'$, $EC'A'$ és $FA'B'$ háromszögek magasságpontjai rendre a H_D, H_E és H_F pontok. Mutassátok meg, hogy

$$H_DB^2 + H_EC^2 + H_FA^2 = H_DC^2 + H_EA^2 + H_FB^2.$$

Megoldás: Készítsünk ábrát. Jelölje H a DEF háromszög magasságpontját. Azt fogjuk elsőként belátni, hogy $HH_D \perp BC$, $HH_E \perp CA$ és $HH_F \perp AB$.



Logikai szimmetria miatt elég belátnunk, hogy $HH_D \perp BC$. Jelölje M a BC oldal felezőpontját. Megmutatjuk, hogy a $B'C'EF$ négyszög Miquel-pontja, azaz a $(DB'C'), (DEF)$ körök második metszéspontja éppen M. Ismert, hogy egy háromszög Feuerbach-köre átmegy a magasságok talppontjain, illetve az oldalak felezőpontjain, tehát a (DEF) kör valóban átmegy M-en. Most jelölje O az (ABC) kör középpontját. Belátjuk, hogy a BB', CC' egyenesek O-ban metszik egymást. Ismét logikai szimmetria miatt elég belátni, hogy a B, B', O pontok egy egyenesen vannak, ami ekvivalens azzal, hogy $DBB'\sphericalangle = CBO\sphericalangle$. Mivel az $ACDF$ húrnégyszög, a kerületi és középponti szögek, illetve a húrnégyszögek tétele miatt $DBB'\sphericalangle = 90° - B'DB\sphericalangle = 90° - FDB\sphericalangle = 90° - BAC\sphericalangle = \dfrac{180° - 2BAC\sphericalangle}{2} = \dfrac{180° - BOC\sphericalangle}{2} = CBO\sphericalangle$, hiszen $BO = CO$. (Az utóbbi állítás úgy is igazolható, hogy mivel az $ACDF$ egy húrnégyszög - azaz az AC, DF egyenesek antiparallelek - és a BO, BH' egyenesek izogonálisak, ahol H' az ABC háromszög magasságpontja, így $BH' \perp AC \implies BO \perp DF$). Tehát B' és C' is rajta van a DO átmérőjű körön, amiről viszont tudjuk, hogy átmegy M-en, hiszen O rajta van a BC szakasz felezőmerőlegesén.

Ismert, hogy egy K magasságpontú háromszögben a P pont Simson-egyenese felezi a PK szakaszt. Így mivel M rajta van a $(DB'C'), (DEF)$ körökön, az M pont tükörképei a DE, DF egyenesekre rajta lesznek a HH_D egyenesen. Viszont ismert, hogy a DEF talpponti háromszög belső szögfelezői a magasságvonalak, míg a külső szögfelezői az oldalegyenesei az ABC háromszögnek. Tehát M rajta van az $EDF\sphericalangle$ külső szögefelezőjén, azaz ha M-et tükrözzük a DE, DF egyeneskre, a kapott két pontot összekötő egyenes merőleges lesz a (külső) szögfelezőre (hiszen a szögfelezőre való tükrözés során ez a két pont egymás képe kell, hogy legyen). Ezzel beláttuk a merőleges feltételeket.

Befejezésül használjuk fel az ismert lemmát, miszerint $PQ \perp AB \iff PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2$ (ennek bizonyítása a Pithagorasz-tétel egyszerű alkalmazása). Emiatt:

$$\begin{array}{rl}
HH_D \perp BC \implies & HB^2 - HC^2 = H_DB^2 - H_DB^2 \\
HH_E \perp CA \implies & HC^2 - HA^2 = H_EC^2 - H_EA^2 \\
HH_F \perp AB \implies & HA^2 - HB^2 = H_FA^2 - H_FB^2 \qquad + \\
\hline
& 0 = H_DB^2 - H_DC^2 + H_EC^2 - H_EA^2 + H_FA^2 - H_FB^2
\end{array}$$

így valóban $H_DB^2 + H_EC^2 + H_FA^2 = H_DC^2 + H_EA^2 + H_FB^2$.