kategória

F

10-12. osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2022. november 18.

FIZIKA
MEGOLDÁSOK

1. feladat

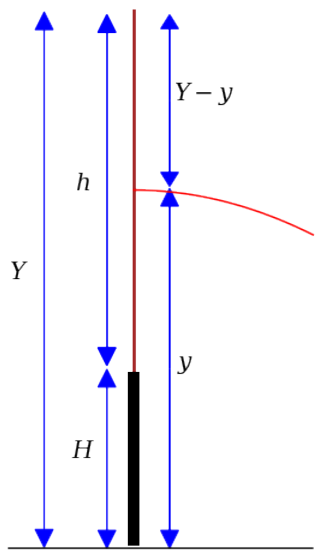
(a)

Vezessük be az $Y = h + H$ mennyiséget, és jellemezzük a bor kifolyási helyét a talajtól mért y magassággal az 1.1. ábrán látható módon. Mivel a hordón fúrt lyuk apró, és a fölötte lévő bor egy $Y - y$ magasságú oszlopot alkot, így a lyukon kifolyó bor sebessége az energia-megmaradás alapján:

$$v = \sqrt{2g(Y-y)}\ . \tag{1.1}$$

Ezt az összefüggést szokás Torricelli-féle kiömlési törvénynek is nevezni.

Innentől a kifolyó bor egy v kezdősebességű, y magasságból induló vízszintes hajítás pályáját követi. (A kifolyó bor sebessége természetesen folyamatosan csökken, de minket csak a legelső, v sebességű pillanat érdekel, hiszen az határozza meg, hogy milyen messze megy el a bor.) A legelső kifolyó csepp t időt tölt a levegőben, ezt a négyzetes úttörvény alapján kifejezhetjük:



1.1. ábra. A vízsugár jellemzéséhez használt mennyiségek ábrázolása.

$$y = \frac{g}{2}t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2y}{g}}\ . \tag{1.2}$$

A csepp vízszintes irányban d utat tesz meg állandó v sebességgel t idő alatt, így:

$$d = vt = 2\sqrt{(Y-y)y}\ . \tag{1.3}$$

Az egyenletet négyzetre emelve és rendezve azt kapjuk, hogy

$$y^2 - Yy + \frac{d^2}{4} = 0\ . \tag{1.4}$$

A másodfokú egyenlet gyökei a lehetséges y értékek:

$$y_\pm = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - d^2}}{2}\ . \tag{1.5}$$

Amennyiben $Y < d$, a diszkrimináns negatív (túl messze van a pohár), így a feladat nem megoldható. Ha ellenben $d \le Y$, akkor lehet megfelelő megoldás, feltéve, hogy a kapott y értékek valamelyike a hordóra esik. Az (1.5) egyenletből az is látszik, hogy a két lehetséges y érték $Y/2$-re szimmetrikusan helyezkedik el. Mindezek alapján összefoglalhatjuk az egyes lehetőségeket:

- $H + h < d$ esetén nincs megoldás,

- $H + h = d$ esetén csak $y = Y/2$ lehet megoldás, ami $H \leq h$ esetén lehetséges,
- $H+h > d$ esetén 2, 1 vagy 0 megoldás van aszerint, hogy rendre a $H \leq y_-$, a $y_- < H \leq y_+$, vagy a $y_+ < H$ feltétel teljesül.

A feladat eredeti megfogalmazásában az $x = y - H$ mennyiség szerepelt, ez az (1.5) egyenlet alapján kifejezhető, és a fentiekkel ekvivalens leírást ad a fúrás helyére:

$$\boxed{x_\pm = \frac{h - H \pm \sqrt{(h+H)^2 - d^2}}{2}}\,. \tag{1.6}$$

(b)

Az (1.3) egyenletben a gyökjel alatt szereplő kifejezés y függvényében egy lefelé nyitott parabolaként ábrázolható. Ennek zérushelyei azonnal leolvashatóak, mint $y_1 = 0$ és $y_2 = Y$, maximumhelye pedig a kettő átlaga, azaz $y = Y/2$. Ha $H \leq h$, akkor $y = Y/2$ – vagy ekvivalensen $x = (h - H)/2$ – helyen kell kifúrni a hordót. Ha viszont $H > h$, akkor a $y = H$ – vagy ekvivalensen $x = 0$ – magasságban kell kifúrni, ugyanis a gyök alatti kifejezés, és ezzel d csökkene, ha nagyobb y értéket választanánk.

2. feladat

Folyadékban úszó testre igaz a következő összefüggés:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{V_\mathrm{b}}{V}\,, \tag{2.1}$$

ahol a ϱ az úszó test átlagsűrűsége, ϱ_0 a folyadék sűrűsége, V a test térfogata, és V_b a test azon részének térfogata, amely bemerül a folyadékba. Tekintsünk egy darab müzlit, aminek kezdetben a tömege m_1, átlagsűrűsége ϱ_1, térfogata V_1, bemerülő térfogata $V_{\mathrm{b}1}$. Később ez a müzlidarab ΔV térfogatnyi tejet felszív, és deformálódhat is, ezért a korábbi mennyiségek m_2, ϱ_2, V_2, $V_{\mathrm{b}2}$ értékekre módosulnak. A (2.1) egyenlet átrendezésével a következőt kapjuk:

$$\begin{Bmatrix} \varrho_0 V_{\mathrm{b}1} = \varrho_1 V_1 = m_1 \\ \varrho_0 V_{\mathrm{b}2} = \varrho_2 V_2 = m_1 + \varrho_0 \Delta V \end{Bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad V_{\mathrm{b}2} = \frac{m_1}{\varrho_0} + \Delta V = V_{\mathrm{b}1} + \Delta V. \tag{2.2}$$

A fenti (2.2) egyenlet kifejezi, hogy bemerülő térfogat pont a felszívott tej térfogatával nő, azaz a tejszint nem változik.

3. feladat

Legyen a melegítés során egy adott pillanatban a jégkocka magassága h, szélessége és hosszúsága a, a víz mélysége pedig x. A jégkocka laptól való elemelkedésének feltétele, hogy a rá ható $F_\mathrm{f} = \rho_\text{víz} x a^2$ felhajtóerő és $G = \rho_\text{jég} h a^2$ gravitációs erő megegyezzen, azaz:

$$\frac{x}{h} = \frac{\rho_\text{jég}}{\rho_\text{víz}} = \frac{9}{10}\,. \tag{3.1}$$

Az elolvadt jég tömege megegyezik a víz tömegével, amely az alábbi feltételt adja:

$$a^2(a-h)\rho_{\text{jég}} = (b^2-a^2)x\rho_{\text{víz}} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{9a^2(a-h)}{10(b^2-a^2)} \ . \tag{3.2}$$

A (3.1) és (3.2) egyenletek egy egyenletrendszert alkotnak, amiből meghatározható x és h értéke a jégkocka felemelkedésének pillanatában. Minket h értéke érdekel centiméterben kifejezve, ezért helyettesítsük be a (3.2) egyenletbe az $x = 9h/10$, $a = 3$, $b = 10$ értékeket, majd oldjuk meg h-ra:

$$\frac{9h}{10} = \frac{81(3-h)}{10(100-9)} \qquad \Longrightarrow \qquad h = 0{,}27\,\mathrm{cm} \ . \tag{3.3}$$

Az elemelkedés pillanatáig elolvadt jég tömege $\Delta m = \rho_{\text{jég}} a^2(a-h) = 22{,}1\,\mathrm{g}$. Az ehhez szükséges hőmennyiség $Q = L_{\mathrm{o}}\Delta m$, amelyet P teljesítményű fűtőberendezés

$$\boxed{t = \frac{L_{\mathrm{o}}\Delta m}{P} \approx 147{,}9\,\mathrm{s} \approx 2{,}5\,\mathrm{perc}} \tag{3.4}$$

idő alatt termel meg.

4. feladat

(a)

Kepler III. törvénye szerint két különböző ellipszis pályán keringő égitest periódusidejei közötti összefüggés az alábbi:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \ , \tag{4.1}$$

ahol T_i és a_i az i-edik égitest keringési ideje és fél nagytengelye. A Föld adatai: $T_{\mathrm{F}} = 1\,\text{év}$, $a_{\mathrm{F}} = 1\,\mathrm{AU}$. A Tesla fél nagytengelye $a = 1{,}3239\,\mathrm{AU}$, keringési ideje pedig:

$$T = T_{\mathrm{F}}\sqrt{\frac{a^3}{a_{\mathrm{F}}^3}} = \sqrt{1{,}3249^3}\,\text{év} = 557\,\mathrm{nap} \ . \tag{4.2}$$

Az A-tól C-ig megtett út $T_{A\to C}$ idejének kiszámításához elevenítsük fel Kepler II. törvényét: a Napot és a Teslát összekötő szakasz (vezérsugár) azonos időközönként azonos területeket „súrol”. A vezérsugár által súrolt terület az $A \to C$ és a $C \to A$ úton ugyanakkora: az ellipszis területének fele. Ezáltal a $T_{A\to C}$ és $T_{C\to A}$ idők azonosak, mindkettő a Tesla T keringési idejének felével egyenlő:

$$\boxed{T_{A\to C} = 278{,}5\,\mathrm{nap}} \ . \tag{4.3}$$

(b)

Az ellipszis A és C pontjaiban a Tesla sebessége a Naptól mért távolsággal fordítottan arányos, azaz $v_{\mathrm{min}}(a+c) = v_{\mathrm{max}}(a-c)$. Átrendezve, a minimális sebesség az alábbi:

$$v_{\mathrm{min}} = \frac{a-c}{a+c} \cdot v_{\mathrm{max}} = \frac{1{,}3249 - 0{,}3389}{1{,}3249 + 0{,}3389} \cdot 33{,}618\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,. \tag{4.4}$$

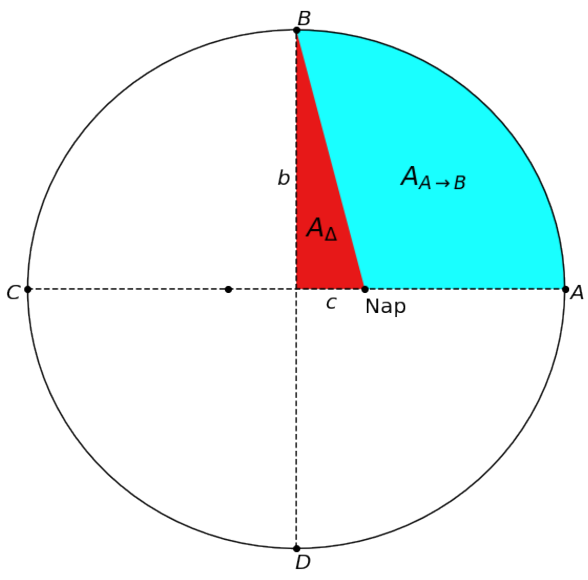
A számolást elvégezve:

$$\boxed{v_{\mathrm{min}} = 19{,}92\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}\,. \tag{4.5}$$

(c)

A Tesla A-tól B-ig megtett útjának $T_{A\to B}$ idejéhez ismét Kepler II. törvényét használjuk: a keringő égitest Δt idő alatt jut el egyik pontból a másikba, és eközben a vezérsugár ΔA területet súrol végig, akkor a területi sebesség állandó: $\Delta A/\Delta t$ = állandó. Vizsgáljunk két különböző területet és a hozzájuk tartozó időtartamokat. Az egyik az ellipszis egészének $A = ab\pi$ területe, amihez a Tesla T keringési ideje tartozik. A másik az ábrán kékkel kiemelt $A_{A\to B}$ terület, amihez a kérdéses $T_{A\to B}$ idő tartozik. Kepler II. törvénye szerint:

$$\frac{A}{T} = \frac{A_{A\to B}}{T_{A\to B}}. \tag{4.6}$$



4.1. ábra. Az $A_{A\to B}$ terület szemléltetése.

Az $A_{A\to B}$ területet a 4.1 ábra alapján úgy kapjuk, hogy az ellipszis negyedének területéből levonjuk a piros háromszög $A_\Delta = bc/2$ területét. Végül a (4.6) egyenlet átrendezésével:

$$T_{A\to B} = \frac{A_{A\to B}}{A}T = \frac{\frac{ab\pi}{4} - \frac{bc}{2}}{ab\pi}T = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\frac{c}{a}\right)T = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\frac{0.3389}{1.3249}\right)557\,\mathrm{nap}\,. \tag{4.7}$$

A számolást elvégezve:

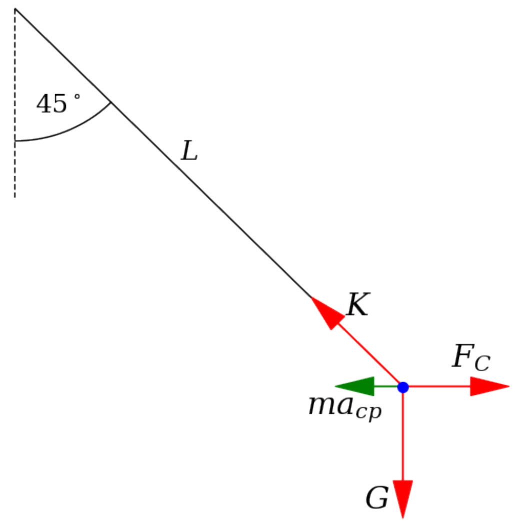
$$\boxed{T_{A\to B} = 116{,}58\,\mathrm{nap}}\,. \tag{4.8}$$

(d)

A helyi forduló 2022. november 18-i időpontja és 2019. augusztus 15. között 1191 nap telt el. A keringési idő 557 nap, azaz 1191 nap két teljes körbemenetelre elég, és ezen felül 77 napig tovább kering a Tesla. Eszerint 2022. november 18-án az A és B pont között volt valahol a Tesla, a B ponthoz közelebb.

5. feladat

A rendszer mozgásegyenletét felírhatjuk a talajhoz rögzített inerciarendszerben, vagy a töltésekkel együtt ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben. Nézzük előbb az inerciarendszerben felírt egyenleteket. A testek szimmetrikusan helyezkednek el, ezért elég a csak az egyikre felírni a mozgásegyenletet.



5.1. ábra. A töltésre ható erők inerciarendszerben.

Az 5.1. ábrán láthatóak a töltésre ható erők (pirossal), illetve azok eredője (zölddel). Az ábrán szerepel a $\boldsymbol{K}$ a kötélerő, a $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ nehézségi erő és az $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ Coulomb-erő vektora. Utóbbi nagysága $F_\mathrm{C} = kQ^2/(\sqrt{2}L)^2$, ahol L a kötél hossza, és $\sqrt{2}L$ a töltések távolsága.

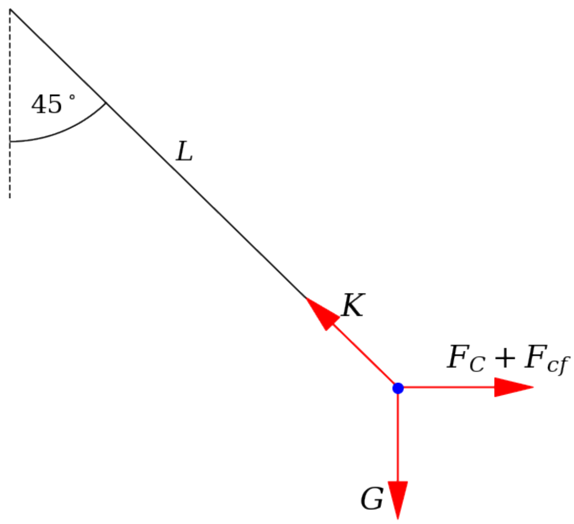
Newton II. törvénye szerint az erők eredője egyelő a test tömegének és gyorsulásának szorzatával. Itt egyenletes körmozgásról van szó, ezért a gyorsulás az $a_{\mathrm{cp}} = \omega^2 r$ centripetális gyorsulás, ahol $r = L/\sqrt{2}$ a körpálya sugara. A mozgásegyenlet függőleges és sugár irányú komponensei:

$$\frac{K}{\sqrt{2}} - G = 0 \qquad \text{és} \qquad m a_{\mathrm{cp}} = \frac{K}{\sqrt{2}} - F_{\mathrm{C}} \,. \tag{5.1}$$

A két egyenletet egybevetve:

$$G = m a_{\mathrm{cp}} + F_{\mathrm{C}} \,. \tag{5.2}$$

Ugyanezt az eredményt egyszerűbben is megkaphatjuk, ha forgó rendszerben gondolkodunk. Ekkor a valódi erők mellett használni kell az $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}}$ centrifugális erőt is az 5.2. ábrán látható módon. Ha a forgó rendszerben nyugalomban van a test, akkor az erők összege nulla. A $\boldsymbol{K}$ kötélérő 45°-ot zár be vízszintessel, ezért az eredő erő akkor lehet nulla, ha a függőleges $\boldsymbol{G}$ erő nagysága azonos a vízszintes $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}}$ erők összegének nagyságával. Ezek párhuzamosak, és azonos irányúak, azaz $G = F_{\mathrm{cf}} + F_{\mathrm{C}}$. A centrifugális erő nagysága $m a_{\mathrm{cp}}$, azonos a centripetális gyorsulás és a test tömegének szorzatának nagyságával, azaz megkaptuk újra az (5.2) egyenletet.



5.2. ábra. A töltésre ható erők forgó vonatkoztatási rendszerben.

Az immár kétféleképpen is levezetett (5.2) egyenletbe G és F_{C} értékét behelyettesítve:

$$mg = m\omega^2 \frac{L}{\sqrt{2}} + k\frac{Q^2}{2L^2} \,.$$

Itt érdemes behelyettesíteni a mennyiségek mérőszámait ($m = L = 1$, $\omega = 2$, $g = 10$, $k = 9{\cdot}10^9$):

$$kQ^2 = 20 - 4\sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \qquad |Q| = \frac{1}{3}10^{-4}\sqrt{2 - \frac{2}{5}\sqrt{2}} \,.$$

A töltések nagysága lehet pozitív vagy negatív is, így a végeredmény: $\boxed{Q_{\pm} = \pm 39{,}92\ \mu\mathrm{C}}$.