



1. feladat

(a) - első megoldás (dinamika)

Tekintsünk egy olyan időpillanatot, amikor a test sebessége v , és figyeljük meg egy rövid Δt ideig a mozgást! Ez alatt a test által megtett utat jelöljük Δx -szel, a sebesség megváltozását pedig Δv -vel! A test $\Delta x/\Delta t$ átlagsebessége valahova v és $v + \Delta v$ közé esik, de ha Δt elég rövid, akkor Δv is sokkal kisebb, mint v , így alkalmazhatjuk a $\Delta x/\Delta t \approx v$ közelítést. Továbbá, a gyorsulás definíciója alapján

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot v. \quad (1.1)$$

Mivel a $v(x)$ függvény lineáris, ezért $\Delta v/\Delta x = C$. Ezt, illetve a $v(x)$ távolságfüggést behelyettesítve, megkaphatjuk a gyorsulás távolságfüggését:

$$a(x) = C^2 x. \quad (1.2)$$

Felhasználva, hogy egy lejtőn súrlódva csúszó test gyorsulása $a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$, a súrlódási együttható távolságfüggése

$$\mu(x) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{C^2 x}{g \cos \alpha}. \quad (1.3)$$

(a) - második megoldás (energetika)

A lejtő tetejétől x távolságra a test $v(x) = Cx$ sebességgel mozog, tehát a mozgási energiája $E_m(x) = \frac{1}{2}mC^2x^2$. A magasságváltozásból felszabaduló helyzeti energia $E_h(x) = mgx \sin \alpha$, ám a súrlódás miatt ez nem tudott teljes egészében a mozgásra fordítódni, tehát a súrlódás által elnyelt energia a kettő különbsége:

$$W_s(x) = E_h(x) - E_m(x) = mgx \sin \alpha - \frac{1}{2}mC^2x^2. \quad (1.4)$$

Kicsi Δx út megtétele alatt az elnyelt energia a két ponton tapasztalható összes energia különbsége:

$$\begin{aligned} \Delta W_s(x) &= W_s(x + \Delta x) - W_s(x) = \\ &= mg \sin \alpha (x + \Delta x - x) - \frac{1}{2}mC^2 [(x + \Delta x)^2 - x^2] = \\ &= mg \sin \alpha \Delta x - mC^2 x \Delta x \left(1 + \frac{\Delta x}{2x} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ha Δx elég kicsi x -hez képest, akkor a zárójelben lévő tört elhagyható, így $\Delta W_s(x) = mg \sin \alpha \Delta x - mC^2 x \Delta x$. A munka definíciója alapján $\Delta W_s(x) = F_s(x) \Delta x$, amiből

$$F_s(x) = mg \cos \alpha \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{C^2 x}{g \cos \alpha} \right), \quad (1.6)$$

és felhasználva, hogy $F_s = \mu mg \cos \alpha$, visszakapjuk az (1.3) egyenlet eredményét.



(b)

Jelöljük a lejtő hosszát L -lel. Ha éppen a lejtő alján szűnik meg a súrlódás, az azt jelenti, hogy $\mu(x = L) = 0$, vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{C^2 L}{g \cos \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{g}{C^2} \sin \alpha} . \quad (1.7)$$

(c) - első megoldás (dinamika)

A testre ható súrlódási erő a lejtő tetejétől x távolságra

$$F_s(x) = \mu(x)mg \cos \alpha = mg \cos \alpha \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{C^2 x}{g \cos \alpha} \right) . \quad (1.8)$$

Elvégezve a $\int_0^L F_s(x) dx$ integrált, vagy kiszámolva az $F_s - x$ függvény görbe alatti területét (ami egy háromszög, tehát elemi úton megtehető), az eredmény megkapható:

$$\boxed{W_s = \frac{mg^2}{2C^2} \sin^2 \alpha} . \quad (1.9)$$

(c) - második megoldás (energetika)

Behelyettesítve a (b) feladat végeredményét az (1.4) egyenletbe, rövid számolás útján visszakapjuk a (1.9) egyenletben látott kifejezést a végzett munkára:

$$W_s(x = L) = mg \cdot \frac{g}{C^2} \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} m C^2 \cdot \frac{g^2}{C^4} \sin^2 \alpha = \frac{mg^2}{2C^2} \sin^2 \alpha . \quad (1.10)$$

Megjegyzés

Az (1.1) egyenlet segítségével felírható a test mozgásegyenlete: $\ddot{x} = C^2 x$, amit megoldva a $v = Cx$ feltétel mellett, a sebesség és az út időfüggése:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot [\operatorname{ch}(Ct) + \operatorname{sh}(Ct)] , \\ v(t) &= AC \cdot [\operatorname{sh}(Ct) + \operatorname{ch}(Ct)] , \end{aligned}$$

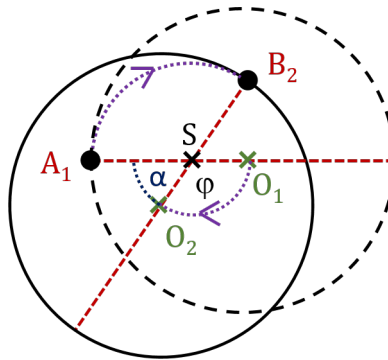
valamilyen A kezdeti paraméterrel. Ez tehát azt jelenti, hogy a lejtő tetejére lehelyezett test nem fog elindulni, hiszen instabil egyensúlyi állapotban van, de ha onnan ki is mozdul, akkor is kell legyen egyszerre egy kezdeti sebesség és kitérés, és ezek egymással precízen összehangolva. A gyakorlatban való megvalósításhoz nem elég tehát egy megfelelő súrlódási tulajdonságokkal rendelkező lejtő, hanem a testet egy adott módon kell indítani. Hogy ezzel ne kelljen foglalkozni, tegyük fel, hogy a lejtő elején valamilyen rövid szakaszon másmilyen $\mu(x)$ érvényes, ahol a test sebessége és elmozdulása a kellő módon összehangolódik, és így lép át abba a tartományba, ahol a feladat által közölt $v(x)$ lineáris függvény már érvényes.



2. feladat

(a)

Miközben a hangya halad, a korong összetett mozgást végez, mely felbontható a tömegközéppontjának haladó mozgására, valamint az akörüli forgásra. Azonban a rendszerre nem hatnak vízszintes külső erők, valamint kezdetben a korong és hangya is állt, a mozgás során tehát a tömegközéppont vízszintesen nem mozdul el.



2.1. ábra. A jellemző pontok helyzete a mozgás során.

A rendszer tömegközéppontját jelölje S , ekkor a korong, illetve hangya tömegközéppontjának távolsága az S ponttól a következőképpen írható:

$$\overline{O_1 S} = \overline{O_2 S} = \frac{m}{m+M} R, \quad (2.1)$$

$$\overline{A_1 S} = \overline{B_2 S} = \frac{M}{m+M} R. \quad (2.2)$$

Mivel a rendszer tömegközéppontja a teljes mozgás során vízszintesen helyben marad, valamint a hangya, illetve a korong tömegközéppontjának távolsága is állandó az S ponttól, tulajdonképpen a korong középpontja és a hangya egy adott időpillanatban ugyanazon ω szögsebességgel jellemezhető körmozgást végez az S pont körül, a fent kiszámított sugarú pályákon.

A továbbiakban használjuk fel, hogy a rendszerre ható külső erők forgatónyomatéka zérus, azaz érvényes a perdületmegmaradás törvénye! A korábbi jelölések mellett jellemezzük a korong saját tömegközéppontja körüli forgását az Ω szögsebességgel, ekkor a perdületmegmaradás törvénye a következő:

$$m \left(\frac{M}{m+M} R \right)^2 \omega + M \left(\frac{m}{m+M} R \right)^2 \omega + \frac{1}{2} M R^2 \Omega = 0. \quad (2.3)$$

Rendezve a kifejezést a két szögsebesség kapcsolata:

$$\Omega = -\frac{2m}{m+M} \omega. \quad (2.4)$$



A hangya koronghoz viszonyított szögsebessége:

$$\omega_{\text{rel}} = \omega - \Omega = \frac{M + 3m}{m + M} \omega . \quad (2.5)$$

A feladat a korong szögelfordulását kérdezi, mi a hangya koronghoz viszonyított szögelfordulását ismerjük (ez éppen π radián). Azonban felhasználhatjuk, hogy az azonos idő alatt történt szögelfordulások nagysága arányos a szögsebességek nagyságának arányával, azaz:

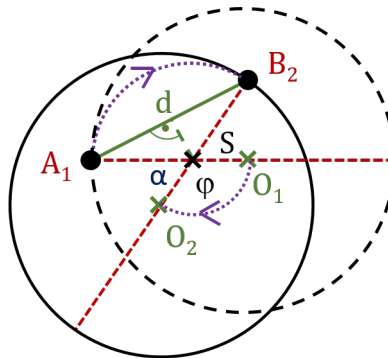
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{|\Omega|}{|\omega_{\text{rel}}|} . \quad (2.6)$$

Felhasználva a (2.5) és (2.6) egyenleteket, valamint rendezve a kifejezést:

$$\alpha = \frac{2m}{M + 3m} \pi . \quad (2.7)$$

(b)

A hangya elmozdulásának meghatározásához egészítsük ki a korábbi ábrát!



2.2. ábra. A hangya elmozdulása.

A tömegközéppont körüli szögelfordulást jellemző φ szög a fenti ábra alapján:

$$\varphi = \pi - \alpha = \frac{m + M}{M + 3m} \pi , \quad (2.8)$$

innen az elmozdulás már könnyen meghatározható:

$$d = 2 \overline{A_1 S} \sin \frac{\varphi}{2} . \quad (2.9)$$

Beírva a φ -re kapott (2.8) kifejezést, valamint a (2.2) egyenletet, a keresett elmozdulás:

$$d = \frac{2MR}{m + M} \sin \left(\frac{m + M}{M + 3m} \frac{\pi}{2} \right) . \quad (2.10)$$



3. feladat

A Newton-féle lehülési törvény szerint egy T_0 kezdeti hőmérsékletű, C hőkapacitású test pillanatnyi hőmérséklete T_k környezetben az alábbi exponenciális függvény szerint változik:

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k) \cdot e^{-\frac{\alpha A}{C}t}, \quad (3.1)$$

ahol A a test felülete, α pedig a test és a környezet közötti hőátadási tényező.

Jelen esetben, mivel a kancsót ideális hővezetőnek tekintjük, a tea és a hűtő belső közege közötti hőkiegyenlítésre írható fel ez az egyenlet. Mivel homogén test esetében a hőkapacitás az anyag mennyiségével arányos, ezért $C \sim V$, így a (3.1) egyenletben lévő exponenciális faktort a következő formában írhatjuk: $e^{-\beta \frac{A}{V}t}$, ahol β a hőátadási tényezőtől, a fajhőtől és a sűrűségtől függő konstans, V pedig a térfogat, amely az első kiöntés előtt $V_1 = 1 \text{ dm}^3$, a második kiöntés előtt $V_2 = 0,75 \text{ dm}^3$, a második kiöntés után pedig $V_3 = 0,5 \text{ dm}^3$.

Mivel a kancsó henger alakot ad a benne lévő teának, ezért a térfogat az alapterület és a magasság szorzataként felírható:

$$V = \frac{d^2 \pi}{4} h, \quad (3.2)$$

és mivel tudjuk, hogy az alap átmérője fele a kezdeti magasságnak (tehát $h_1 = 2d$, amiből $V_1 = d^3 \pi / 2$), ezért az átmérő kifejezhető a kezdeti térfogattal:

$$d = \sqrt[3]{\frac{2V_1}{\pi}} \approx 8,6 \text{ cm}. \quad (3.3)$$

Emellett, szintén geometriai megfontolások miatt, a tea felszíne a henger két alaplappjának és palástjának területével fejezhető ki:

$$A = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} + d^2 \pi \cdot h = \frac{d^2 \pi}{2} + \frac{4V}{d}. \quad (3.4)$$

Ez alapján, az első kiöntés előtt, a második kiöntés előtt és a második kiöntés után használatos térfogat- és felületértékek az alábbiak:

$$V_1 = 1 \text{ dm}^3, \quad A_1 = 5 \sqrt[3]{\frac{V_1^2 \pi}{2}} \approx 5,8 \text{ dm}^2, \quad (3.5)$$

$$V_2 = 0,75 \text{ dm}^3, \quad A_2 = \sqrt[3]{\frac{V_1^2 \pi}{2}} \left(1 + 4 \frac{V_2}{V_1}\right) \approx 4,6 \text{ dm}^2, \quad (3.6)$$

$$V_3 = 0,5 \text{ dm}^3, \quad A_3 = \sqrt[3]{\frac{V_1^2 \pi}{2}} \left(1 + 4 \frac{V_3}{V_1}\right) \approx 3,5 \text{ dm}^2. \quad (3.7)$$

A két kiöntés előtti hőmérsékletváltozásra felírt két egyenlet az alábbi formában írható:

$$T_1 = T_k + (T_0 - T_k) \cdot e^{-\beta \frac{A_1}{V_1} t_1}, \quad (3.8)$$

$$T_2 = T_k + (T_1 - T_k) \cdot e^{-\beta \frac{A_2}{V_2} t_2}. \quad (3.9)$$



Az első egyenletből fejezzük ki β -t:

$$\beta = -\frac{V_1}{A_1 t_1} \ln \left(\frac{T_1 - T_k}{T_0 - T_k} \right), \quad (3.10)$$

majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$T_2 = T_k + (T_1 - T_k) \exp \left[\frac{V_1 A_2 t_2}{V_2 A_1 t_1} \ln \left(\frac{T_1 - T_k}{T_0 - T_k} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Kihasználva, hogy $\frac{V_1 A_2 t_2}{V_2 A_1 t_1} = \left(\frac{V_1}{5V_2} + \frac{4}{5} \right) \frac{t_2}{t_1} = 2$, és alkalmazva a logaritmikus azonosságokat, az alábbi egyenletre jutunk:

$$(T_2 - T_k)(T_0 - T_k)^2 = (T_1 - T_k)^3. \quad (3.12)$$

Ez egy harmadfokú egyenlet T_k -ra, de mivel a harmadfokú tag az egyenlet mindkét oldalán ugyanolyan együtthatóval szerepel, kiesik, így az alábbi másodfokú egyenlet marad:

$$(3T_1 - T_2 - 2T_0)T_k^2 + (T_0^2 + 2T_0T_2 - 3T_1^2)T_k + T_1^3 - T_0^2T_2 = 0, \quad (3.13)$$

$$-45^\circ C T_k^2 + 3312 (\text{°C})^2 T_k - 23616 (\text{°C})^3 = 0. \quad (3.14)$$

A két megoldás $T_{k1} = 8^\circ\text{C}$ és $T_{k2} = 65,6^\circ\text{C}$, azonban a második esetben β értelmetlen lenne, hiszen a (3.10) egyenletben egy negatív szám logaritmusát kapnánk, így ezt elvetjük. A környezet hőmérsékletére tehát (és így a tea hosszú idő utáni hőmérsékletére is) $T_k = 8^\circ\text{C}$ -t kapunk.

Ennek ismeretében $\beta = \frac{V_1}{A_1 t_1} \ln 2$, amit felhasználhatunk a harmadik hűlési szakaszra vonatkozó összefüggés felírásakor. A kérdés, hogy milyen t_3 idő esetén érjük el T_{id} -t, tehát

$$T_{\text{id}} = T_k + (T_2 - T_k) \cdot e^{-\beta \frac{A_3}{V_3} t_3}, \quad (3.15)$$

amiből

$$t_3 = -\frac{V_3}{\beta A_3} \ln \left(\frac{T_{\text{id}} - T_k}{T_2 - T_k} \right) = t_1 \frac{V_3 A_1}{V_1 A_3} \log_2 \left(\frac{T_2 - T_k}{T_{\text{id}} - T_k} \right). \quad (3.16)$$

A feladatban megadott és korábban kiszámolt adatokat behelyettesítve a végeredmény:

$$\boxed{t_3 \approx 29 \text{ perc}}. \quad (3.17)$$

4. feladat

(a) - első megoldás (kondenzátorok kapcsolása)

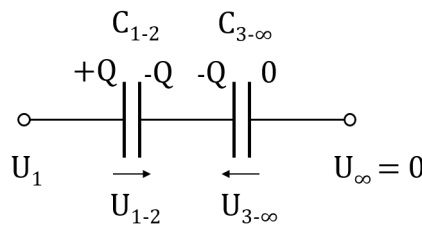
A feladatban megadott elrendezés átalakítható egy olyan kapcsolássá, melyben két gömbkondenzátor szerepel, a következő megfontolások alapján:

- Az egyik gömbkondenzátor fegyverzeteit az 1-es és 2-es gömbhéjak alkotják (hiszen rajtuk azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés található).



- A másik gömbkondenzátor egyik lemezét a 3-as gömbhéj alkotja, melyet ideális vezetővel kapcsolhatunk össze a 2-es gömbhéjat szimbolizáló lemezzel (mivel a Gauss törvény értelmében a 2-es és 3-as gömbhéj között az elektromos térerősség zérus, azaz ez a két felület ekvipotenciális).
- A 3-as lemezzel „párban álló” 4. lemez potenciálja megegyezik a végtelenben vett potenciállal (azaz zérussal), a rajta lévő töltés nulla.

Az így kapott kapcsolást szemlélteti a 4.1. ábra.



4.1. ábra. Az eredeti elrendezéssel ekvivalens kapcsolat.

Az egyes kondenzátorok kapacitásai:

$$C_{1-2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (4.1)$$

$$C_{3-\infty} = 4\pi\epsilon_0 R_3. \quad (4.2)$$

A kondenzátorokon eső feszültségek nagysága:

$$U_{1-2} = \frac{Q}{C_{1-2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.3)$$

$$U_{3-\infty} = \frac{Q}{C_{3-\infty}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}. \quad (4.4)$$

Használjuk fel, hogy a teljes rendszer elektrosztatikus energiája megegyezik a két gömbkondenzátor összenergiájával! Ehhez az egyes kondenzátorok energiája:

$$W_{1-2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{1-2}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.5)$$

$$W_{3-\infty} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{3-\infty}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}. \quad (4.6)$$

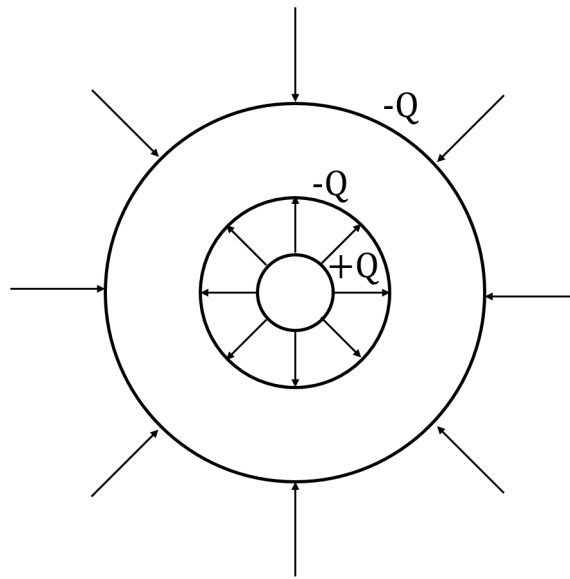
Összegezve a teljes energia:

$$W_{\text{teljes}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (4.7)$$



(a) - második megoldás (definíció alapján)

A feladat megoldható pusztán a potenciál, illetve elektrosztatikus energia definícióját felhasználva is. Ehhez első lépésben határozzuk meg az elrendezés erővonalterképét, ezt szemlélteti az alábbi 4.2 ábra.



4.2. ábra. Az elrendezés erővonalterképe.

Gauss törvényét felírva az 1-es gömbhéjon belüli, az 1-2 közötti, a 2-3 közötti, illetve a 3-as héjon kívüli tartományokban felvett gömbfelületekre, az elektromos térerősség nagysága a következő függvénnyel írható le:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < r < R_1, \\ Q/(4\pi\epsilon_0 r^2), & \text{ha } R_1 < r < R_2, \\ 0, & \text{ha } R_2 < r < R_3, \\ -Q/(4\pi\epsilon_0 r^2), & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Az elektrosztatikus energia előállítható az elektromos mező energiasűrűségének térfogati integráljaként, azaz általános alakban:

$$W_{\text{teljes}} = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2(r) dV. \quad (4.9)$$

Jelen esetben a gömbszimmetrikus elrendezés miatt ez a következő egyszerűbb alakra hozható:

$$W_{\text{teljes}} = \int_0^\infty \frac{\epsilon_0}{2} E^2(r) 4r^2 \pi dr. \quad (4.10)$$

Tartományokra bontva felírva az integrálást, a triviálisan zérus tagokat elhagyva:

$$W_{\text{teljes}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4r^2 \pi dr + \int_{R_3}^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4r^2 \pi dr. \quad (4.11)$$



Egyszerűsítve a kifejezést:

$$W_{\text{teljes}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \right), \quad (4.12)$$

végül elvégezve az integrálást, a határok behelyettesítését követően visszakapjuk a (4.7) egyenlet végeredményét.

(b) - első megoldás (kondenzátorok kapcsolása)

A legbelső gömb középpontjában és bármely más pontjában a potenciál azonos, hiszen a fémek ekvipotenciálisak. Ezáltal kereshetjük a legbelső gömb és a végtelen távoli pont potenciálkülönbségét, amely definíció szerint az alábbi alakot ölti (az előjeleket az 4.1 ábrának megfelelően felvéve):

$$U_1 - U_{\infty} = U_{1-2} - U_{3-\infty}. \quad (4.13)$$

Behelyettesítve (4.3) és (4.4) összefüggéseket, és kihasználva, hogy a potenciált a végtelenben választottuk zérusnak:

$$U_1 - 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}. \quad (4.14)$$

A kifejezést rendezve megkapjuk a keresett potenciált:

$$U_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right). \quad (4.15)$$

(b) - második megoldás (definíció alapján)

Az előző megoldásban szereplő indoklást követve tekintjük a legbelső gömb és a végtelen távoli pont potenciálkülönbségét. Ez definíció szerint megegyezik azzal a munkamennyiséggel, amely ahhoz szükséges, hogy egy egységnyi pozitív töltést a legbelső gömb felületéről a végtelenbe juttassunk. Formulákkal ez a következőképp írható:

$$U_1 - U_{\infty} = \int_{R_1}^{\infty} E(r) dr. \quad (4.16)$$

Kifejtve az egyes tartományokra, a triviálisan zérus tagokat elhagyva:

$$U_1 - U_{\infty} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr. \quad (4.17)$$

Egyszerűsítve a kifejezést:

$$U_1 - U_{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr - \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \right). \quad (4.18)$$

Az integrálást elvégezve a következő eredményt kapjuk:

$$U_1 - U_{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right). \quad (4.19)$$

Kihasználva, hogy $U_{\infty} = 0$, a végeredményre ismét megkapjuk a (4.15) egyenletben felírt potenciálértéket.



5. feladat

Első megoldás

A feladatban megadott útmutatások alapján az elektronok mozgásegyenlete egyszerűen felírható, elsőként vektoros alakban:

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (5.1)$$

ahol e az elemi töltés. Komponensenként kiírva, és felhasználva az impulzus- és sebességkomponensek közti relációkat:

$$M_x \dot{v}_x = -eBv_y, \quad (5.2a)$$

$$M_y \dot{v}_y = eBv_x. \quad (5.2b)$$

Látható, hogy mindkét egyenletben szerepel mindkét sebességkomponens, ezáltal egy csatolt differenciálegyenlet-rendszert kaptunk. Az ebből adódó nehézséget elháríthatjuk, ha az első egyenletet idő szerint deriváljuk, majd a másodikat az így kapott másodrendű differenciálegyenletbe behelyettesítjük:

$$\ddot{v}_x = -\frac{e^2 B^2}{M_x M_y} v_x. \quad (5.3)$$

A fenti egyenlet a harmonikus rezgőmozgás ismert mozgásegyenlete, annyi különbséggel, hogy ezúttal az nem a kitérésre, hanem az egyik sebességkomponensre vonatkozik. Az ismert megoldás (általános α és β konstansok mellett) az alábbi:

$$v_x(t) = \alpha \sin(\omega_c t) + \beta \cos(\omega_c t), \quad (5.4)$$

ahol ω_c az (5.3) egyenletből leolvasható ciklotronfrekvencia:

$$\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{M_x M_y}}. \quad (5.5)$$

A (5.4) megoldást a (5.2a) egyenlet bal oldalába visszahelyettesítve megkaphatjuk a v_y komponens időfüggését is:

$$v_y(t) = \sqrt{\frac{M_x}{M_y}} [\beta \sin(\omega_c t) - \alpha \cos(\omega_c t)]. \quad (5.6)$$

A $t = 0$ kezdeti pillanatban az (5.4) és (5.6) egyenletek a következő feltételeket adják az a és b együtthatókra:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{M_y}{M_x}} v_y(0), \quad (5.7a)$$

$$\beta = v_x(0). \quad (5.7b)$$

Ezek alapján a sebességek időfüggése új alakra hozható:

$$v_x(t) = v_x(0) \cos(\omega_c t) - \sqrt{\frac{M_y}{M_x}} v_y(0) \sin(\omega_c t), \quad (5.8a)$$

$$v_y(t) = v_y(0) \cos(\omega_c t) + \sqrt{\frac{M_x}{M_y}} v_x(0) \sin(\omega_c t). \quad (5.8b)$$



Az (5.8) egyenletből integrálással vagy pedig a harmonikus rezgőmozgásra vonatkozó analógia által kiszámítható az elektron pályája:

$$x(t) = x(0) + \frac{v_x(0)}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + \sqrt{\frac{M_y}{M_x}} \frac{v_y(0)}{\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1], \quad (5.9a)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{v_y(0)}{\omega_c} \sin(\omega_c t) - \sqrt{\frac{M_x}{M_y}} \frac{v_x(0)}{\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1]. \quad (5.9b)$$

A fentiek egy ellipszis paraméteres kifejezését adják. Ez másképp is látható, ha bevezetjük az alábbi mennyiségeket:

$$x_c = x(0) - \sqrt{\frac{M_y}{M_x}} \frac{v_y(0)}{\omega_c}, \quad (5.10a)$$

$$y_c = y(0) + \sqrt{\frac{M_x}{M_y}} \frac{v_x(0)}{\omega_c}, \quad (5.10b)$$

$$a_c = \frac{\sqrt{M_x M_y v_x^2(0) + M_y^2 v_y^2(0)}}{eB}, \quad (5.10c)$$

$$b_c = \frac{\sqrt{M_x M_y v_y^2(0) + M_x^2 v_x^2(0)}}{eB}, \quad (5.10d)$$

majd egy algebrai átalakítást elvégezzünk:

$$\boxed{\frac{[x(t) - x_c]^2}{a_c^2} + \frac{[y(t) - y_c]^2}{b_c^2} = 1}. \quad (5.11)$$

A periódusidő pedig a körfrekvencia (5.5) képletéből kapható meg:

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi \sqrt{M_x M_y}}{eB}}. \quad (5.12)$$

Második megoldás

A probléma a fentieknél egyszerűbben is megoldható, ha azt visszavezetjük a jól ismert forgásszimmetrikus esetre, amikor az elektron dinamikája egyetlen M tömeggel jellemezhető. Ekkor ismert, hogy a mozgás körpályán történik, a periódusidő pedig:

$$T_c = \frac{2\pi M}{eB}. \quad (5.13)$$

Hogy ezt megtehesük, vezessünk be új koordinátákat és sebességkomponenseket az effektív tömegek felhasználásával:

$$X = \sqrt{M_x} \cdot x \quad \Longrightarrow \quad V_x = \sqrt{M_x} \cdot v_x, \quad (5.14a)$$

$$Y = \sqrt{M_y} \cdot y \quad \Longrightarrow \quad V_y = \sqrt{M_y} \cdot v_y. \quad (5.14b)$$



Az (5.2) mozgásegyenletbe ezeket behelyettesítve az átskálázott mennyiségekre az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$M\dot{V}_x = -eBV_y, \quad (5.15a)$$

$$M\dot{V}_y = eBV_x, \quad (5.15b)$$

ahol bevezettük az alábbi tömegparamétert:

$$M = \sqrt{M_x M_y}. \quad (5.16)$$

Ez a mozgásegyenlet immár teljesen azonos a forgásszimmetrikus esettel. Így láthatjuk, hogy az $X - Y$ síkon az elektronok körpályán fognak keringeni, amelyből következően a tényleges pálya az $x - y$ síkon ellipszis. A periódusidő (5.12) formuláját is visszkapjuk, ha az (5.13) kifejezésbe behelyettesítjük az (5.16) egyenletben definiált tömeget.