



1. feladat

(a)

Vezessük be az $Y = h + H$ mennyiséget, és jellemezzük a bor kifolyási helyét a talajtól mért y magassággal az 1.1. ábrán látható módon. Mivel a hordón fűrt lyuk apró, és a fölötte lévő bor egy $Y - y$ magasságú oszlopot alkot, így a lyukon kifolyó bor sebessége az energia-megmaradás alapján:

$$v = \sqrt{2g(Y - y)}. \quad (1.1)$$

Ezt az összefüggést szokás Torricelli-féle kiömlési törvénynek is nevezni.

Innentől a kifolyó bor egy v kezdősebességű, y magasságból induló vízszintes hajítás pályáját követi. (A kifolyó bor sebessége természetesen folyamatosan csökken, de minket csak a legelső, v sebességű pillanat érdekel, hiszen az határozza meg, hogy milyen messze megy el a bor.) A legelső kifolyó csepp t időt tölt a levegőben, ezt a négyzetes úttörvény alapján kifejezhetjük:

$$y = \frac{g}{2}t^2 \quad \implies \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}}. \quad (1.2)$$

A csepp vízszintes irányban d utat tesz meg állandó v sebességgel t idő alatt, így:

$$d = vt = 2\sqrt{(Y - y)y}. \quad (1.3)$$

Az egyenletet négyzetre emelve és rendezve azt kapjuk, hogy

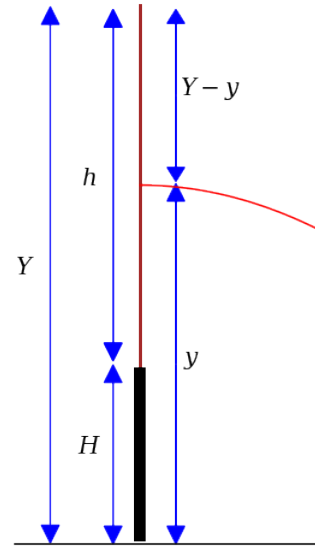
$$y^2 - Yy + \frac{d^2}{4} = 0. \quad (1.4)$$

A másodfokú egyenlet gyökei a lehetséges y értékek:

$$y_{\pm} = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - d^2}}{2}. \quad (1.5)$$

Amennyiben $Y < d$, a diszkrimináns negatív (túl messze van a pohár), így a feladat nem megoldható. Ha ellenben $d \leq Y$, akkor lehet megfelelő megoldás, feltéve, hogy a kapott y értékek valamelyike a hordóra esik. Az (1.5) egyenletből az is látszik, hogy a két lehetséges y érték $Y/2$ -re szimmetrikusan helyezkedik el. Mindezek alapján összefoglalhatjuk az egyes lehetőségeket:

- $H + h < d$ esetén nincs megoldás,



1.1. ábra. A vízszögár jellemzéséhez használt mennyiségek ábrázolása.



- $H + h = d$ esetén csak $y = Y/2$ lehet megoldás, ami $H \leq h$ esetén lehetséges,
- $H + h > d$ esetén 2, 1 vagy 0 megoldás van aszerint, hogy rendre a $H \leq y_-$, a $y_- < H \leq y_+$, vagy a $y_+ < H$ feltétel teljesül.

A feladat eredeti megfogalmazásában az $x = y - H$ mennyiség szerepelt, ez az (1.5) egyenlet alapján kifejezhető, és a fentiekkel ekvivalens leírást ad a fúrás helyére:

$$x_{\pm} = \frac{h - H \pm \sqrt{(h + H)^2 - d^2}}{2}. \quad (1.6)$$

(b)

Az (1.3) egyenletben a gyökjel alatt szereplő kifejezés y függvényében egy lefelé nyitott parabolaként ábrázolható. Ennek zérushelyei azonnal leolvashatóak, mint $y_1 = 0$ és $y_2 = Y$, maximumhelye pedig a kettő átlaga, azaz $y = Y/2$. Ha $H \leq h$, akkor $y = Y/2$ – vagy ekvivalensen $x = (h - H)/2$ – helyen kell kifúrni a hordót. Ha viszont $H > h$, akkor a $y = H$ – vagy ekvivalensen $x = 0$ – magasságban kell kifúrni, ugyanis a gyök alatti kifejezés, és ezzel d csökken, ha nagyobb y értéket választanánk.

2. feladat

Folyadékban úszó testre igaz a következő összefüggés:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_b}{V}, \quad (2.1)$$

ahol a ρ az úszó test átlagsűrűsége, ρ_0 a folyadék sűrűsége, V a test térfogata, és V_b a test azon részének térfogata, amely bemerül a folyadékba. Tekintsünk egy darab müzlit, aminek kezdetben a tömege m_1 , átlagsűrűsége ρ_1 , térfogata V_1 , bemerülő térfogata V_{b1} . Később ez a müzlidarab ΔV térfogatnyi tejet felszív, és deformálódhat is, ezért a korábbi mennyiségek m_2 , ρ_2 , V_2 , V_{b2} értékekre módosulnak. A (2.1) egyenlet átrendezésével a következőt kapjuk:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 V_{b1} = \rho_1 V_1 = m_1 \\ \rho_0 V_{b2} = \rho_2 V_2 = m_1 + \rho_0 \Delta V \end{array} \right\} \implies V_{b2} = \frac{m_1}{\rho_0} + \Delta V = V_{b1} + \Delta V. \quad (2.2)$$

A fenti (2.2) egyenlet kifejezi, hogy bemerülő térfogat pont a felszívott tej térfogatával nő, azaz a tejszint nem változik.

3. feladat

Legyen a melegítés során egy adott pillanatban a jégkocka magassága h , szélessége és hosszúsága a , a víz mélysége pedig x . A jégkocka laptól való elemelkedésének feltétele, hogy a rá ható $F_f = \rho_{\text{víz}} x a^2$ felhajtóerő és $G = \rho_{\text{jég}} h a^2$ gravitációs erő megegyezzen, azaz:

$$\frac{x}{h} = \frac{\rho_{\text{jég}}}{\rho_{\text{víz}}} = \frac{9}{10}. \quad (3.1)$$



Az elolvadt jég tömege megegyezik a víz tömegével, amely az alábbi feltételt adja:

$$a^2(a-h)\rho_{\text{jég}} = (b^2 - a^2)x\rho_{\text{víz}} \implies x = \frac{9a^2(a-h)}{10(b^2 - a^2)}. \quad (3.2)$$

A (3.1) és (3.2) egyenletek egy egyenletrendszert alkotnak, amiből meghatározható x és h értéke a jégkocka felemelkedésének pillanatában. Minket h értéke érdekel centiméterben kifejezve, ezért helyettesítsük be a (3.2) egyenletbe az $x = 9h/10$, $a = 3$, $b = 10$ értékeket, majd oldjuk meg h -ra:

$$\frac{9h}{10} = \frac{81(3-h)}{10(100-9)} \implies h = 0,27 \text{ cm}. \quad (3.3)$$

Az elemelkedés pillanatáig elolvadt jég tömege $\Delta m = \rho_{\text{jég}}a^2(a-h) = 22,1 \text{ g}$. Az ehhez szükséges hőmennyiség $Q = L_o\Delta m$, amelyet P teljesítményű fűtőberendezés

$$t = \frac{L_o\Delta m}{P} \approx 147,9 \text{ s} \approx 2,5 \text{ perc} \quad (3.4)$$

idő alatt termel meg.

4. feladat

(a)

Kepler III. törvénye szerint két különböző ellipszis pályán keringő égitest periódusidejei közötti összefüggés az alábbi:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3}, \quad (4.1)$$

ahol T_i és a_i az i -edik égitest keringési ideje és fél nagytengelye. A Föld adatai: $T_F = 1 \text{ év}$, $a_F = 1 \text{ AU}$. A Tesla fél nagytengelye $a = 1,3239 \text{ AU}$, keringési ideje pedig:

$$T = T_F \sqrt{\frac{a^3}{a_F^3}} = \sqrt{1,3249^3} \text{ év} = 557 \text{ nap}. \quad (4.2)$$

Az A -tól C -ig megtett út $T_{A \rightarrow C}$ idejének kiszámításához elevenítsük fel Kepler II. törvényét: a Napot és a Teslát összekötő szakasz (vezérsugár) azonos időközönként azonos területeket „súrol”. A vezérsugár által súrolt terület az $A \rightarrow C$ és a $C \rightarrow A$ úton ugyanakkora: az ellipszis területének fele. Ezáltal a $T_{A \rightarrow C}$ és $T_{C \rightarrow A}$ idők azonosak, mindkettő a Tesla T keringési idejének felével egyenlő:

$$T_{A \rightarrow C} = 278,5 \text{ nap}. \quad (4.3)$$



(b)

Az ellipszis A és C pontjaiban a Tesla sebessége a Naptól mért távolsággal fordítottan arányos, azaz $v_{\min}(a+c) = v_{\max}(a-c)$. Átrendezve, a minimális sebesség az alábbi:

$$v_{\min} = \frac{a-c}{a+c} \cdot v_{\max} = \frac{1,3249 - 0,3389}{1,3249 + 0,3389} \cdot 33,618 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (4.4)$$

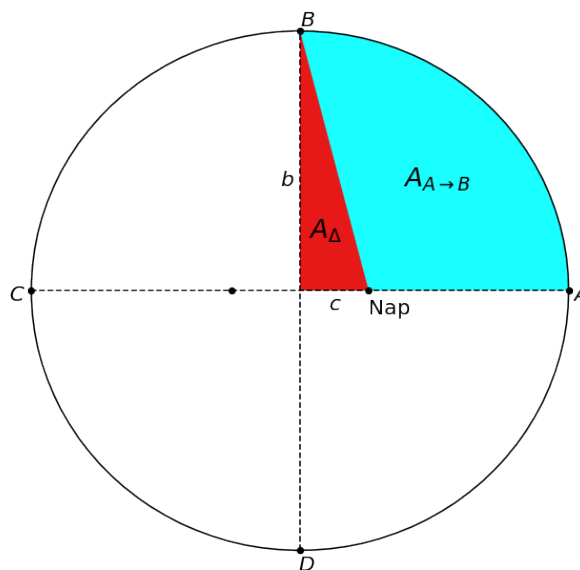
A számolást elvégezve:

$$v_{\min} = 19,92 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (4.5)$$

(c)

A Tesla A -tól B -ig megtett útjának $T_{A \rightarrow B}$ idejéhez ismét Kepler II. törvényét használjuk: a keringő égitest Δt idő alatt jut el egyik pontból a másikba, és ekközben a vezérsugár ΔA területet sűrol végig, akkor a területi sebesség állandó: $\Delta A / \Delta t = \text{állandó}$. Vizsgáljunk két különböző területet és a hozzájuk tartozó időtartamokat. Az egyik az ellipszis egészének $A = ab\pi$ területe, amihez a Tesla T keringési ideje tartozik. A másik az ábrán kézzel kiemelt $A_{A \rightarrow B}$ terület, amihez a kérdéses $T_{A \rightarrow B}$ idő tartozik. Kepler II. törvénye szerint:

$$\frac{A}{T} = \frac{A_{A \rightarrow B}}{T_{A \rightarrow B}}. \quad (4.6)$$



4.1. ábra. Az $A_{A \rightarrow B}$ terület szemléltetése.

kategória

F

10-12.
osztályosok



XVI. DÜRER VERSENY

Helyi forduló:
2022. november 18.



FIZIKA
MEGOLDÁSOK

Az $A_{A \rightarrow B}$ területet a 4.1 ábra alapján úgy kapjuk, hogy az ellipszis negyedének területéből levonjuk a piros háromszög $A_{\Delta} = bc/2$ területét. Végül a (4.6) egyenlet átrendezésével:

$$T_{A \rightarrow B} = \frac{A_{A \rightarrow B}}{A} T = \frac{\frac{ab\pi}{4} - \frac{bc}{2}}{ab\pi} T = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \frac{c}{a} \right) T = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \frac{0.3389}{1.3249} \right) 557 \text{ nap} . \quad (4.7)$$

A számolást elvégezve:

$$T_{A \rightarrow B} = 116,58 \text{ nap} . \quad (4.8)$$

(d)

A helyi forduló 2022. november 18-i időpontja és 2019. augusztus 15. között 1191 nap telt el. A keringési idő 557 nap, azaz 1191 nap két teljes körbemenetelre elég, és ezen felül 77 napig tovább kering a Tesla. Eszerint 2022. november 18-án az A és B pont között volt valahol a Tesla, a B ponthoz közelebb.

Megjegyzés

A feladat egyes részei alternatív úton is megoldhatóak a Négyjegyű Függvénytáblázatban is fellelhető hasznos formulák segítségével. Az alábbiakban erre mutatunk néhány példát:

- Egyrészt, az ellipszispályán keringő bolygó keringési ideje az alábbiak szerint számítható:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}} ,$$

ahol $M = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg a Nap tömege, $\gamma = 6,6743 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² a gravitációs állandó, és $a = 1,3249$ AU $\approx 1,982 \cdot 10^{11}$ m az ellipszis fél nagytengelye. Az adatokat behelyettesítve a Tesla keringési idejére visszakapjuk az (a) feladatrészen számolt értéket:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1,982)^3}{6,6743 \cdot 1,989}} \cdot \frac{10^7}{60 \cdot 60 \cdot 24} \text{ nap} = 556,93 \text{ nap} .$$

- Másrészt, az ellipszispályán keringő bolygó pillanatnyi sebessége szintén kifejezhető a pálya paramétereiből:

$$v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} ,$$

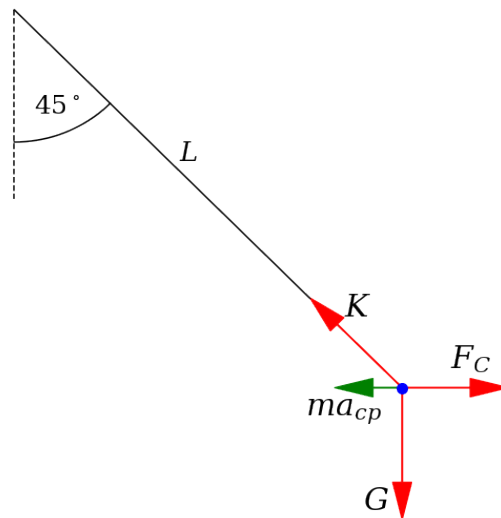
ahol r a bolygó pillanatnyi távolsága a Naptól. A Tesla minimális sebességét a 4.1 ábrán levő C pontban veszi fel, ahol éppen $r = a + c = 1,6638$ AU távolságra van a Naptól. Ezt a fenti formulába behelyettesítve visszakapjuk a (b) feladatrészen eredményét:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{6,6743 \cdot 1,989}{1,496} \left(\frac{2}{1,6638} - \frac{1}{1,3249} \right)} \cdot \frac{10^4}{1000} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 19,92 \frac{\text{km}}{\text{s}} .$$



5. feladat

A rendszer mozgásegyenletét felírhatjuk a talajhoz rögzített inerciarendszerben, vagy a töltésekkel együtt ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben. Nézzük előbb az inerciarendszerben felírt egyenleteket. A testek szimmetrikusan helyezkednek el, ezért elég a csak az egyikre felírni a mozgásegyenletet.



5.1. ábra. A töltésre ható erők inerciarendszerben.

Az 5.1. ábrán láthatóak a töltésre ható erők (pirossal), illetve azok eredője (zölddel). Az ábrán szerepel a \mathbf{K} a kötélerő, a $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ nehézségi erő és az \mathbf{F}_C Coulomb-erő vektora. Utóbbi nagysága $F_C = kQ^2/(\sqrt{2}L)^2$, ahol L a kötéel hossza, és $\sqrt{2}L$ a töltések távolsága.

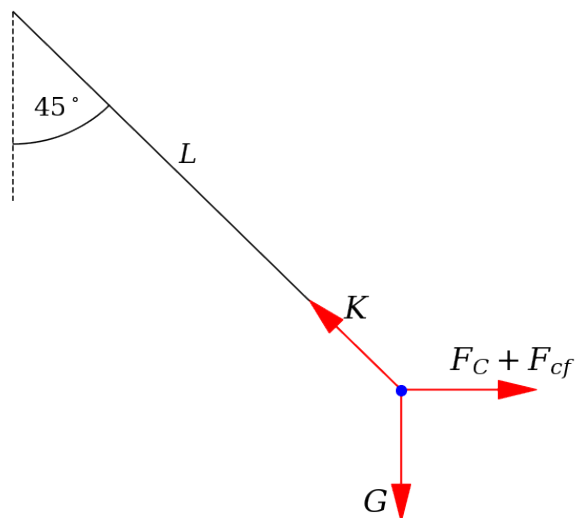
Newton II. törvénye szerint az erők eredője egyelő a test tömegének és gyorsulásának szorzatával. Itt egyenletes körmozgásról van szó, ezért a gyorsulás az $a_{cp} = \omega^2 r$ centripetális gyorsulás, ahol $r = L/\sqrt{2}$ a körpálya sugara. A mozgásegyenlet függőleges és sugár irányú komponensei:

$$\frac{K}{\sqrt{2}} - G = 0 \quad \text{és} \quad ma_{cp} = \frac{K}{\sqrt{2}} - F_C . \quad (5.1)$$

A két egyenletet egybevetve:

$$G = ma_{cp} + F_C . \quad (5.2)$$

Ugyanezt az eredményt egyszerűbben is megkaphatjuk, ha forgó rendszerben gondolkodunk. Ekkor a valódi erők mellett használni kell az \mathbf{F}_{cf} centrifugális erőt is az 5.2. ábrán látható módon. Ha a forgó rendszerben nyugalomban van a test, akkor az erők összege nulla. A \mathbf{K} kötélerő 45° -ot zár be vízszintessel, ezért az eredő erő akkor lehet nulla, ha a függőleges \mathbf{G} erő nagysága azonos a vízszintes $\mathbf{F}_C + \mathbf{F}_{cf}$ erők összegének nagyságával. Ezek párhuzamosak, és azonos irányúak, azaz $G = F_{cf} + F_C$. A centrifugális erő nagysága ma_{cp} , azonos a centripetális gyorsulás és a test tömegének szorzatának nagyságával, azaz megkaptuk újra az (5.2) egyenletet.



5.2. ábra. A töltésre ható erők forgó vonatkoztatási rendszerben.

Az immár kétféleképpen is levezetett (5.2) egyenletbe G és F_C értékét behelyettesítve:

$$mg = m\omega^2 \frac{L}{\sqrt{2}} + k \frac{Q^2}{2L^2} . \quad (5.3)$$

Itt érdemes behelyettesíteni a mennyiségek mérőszámait ($m = L = 1, \omega = 2, g = 10, k = 9 \cdot 10^9$):

$$kQ^2 = 20 - 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |Q| = \frac{1}{3} 10^{-4} \sqrt{2 - \frac{2}{5}\sqrt{2}} . \quad (5.4)$$

A töltések nagysága lehet pozitív vagy negatív is, így a végeredmény: $Q_{\pm} = \pm 39,92 \mu\text{C}$.