A1. Zsófi észrevette, hogy a mai dátumban (2023. 01. 13.) a 0, 1, 2 és 3 számjegyek mind kétszer szerepelnek. Soroljátok fel azokat a dátumokat az elmúlt tíz évben (2013. 01. 13. óta, a mai dátumot nem számítva), amik szintén pontosan kétszer tartalmazzák a 0, 1, 2 és 3 számjegyek mindegyikét.

A dátumokat elég felsorolnotok; azt nem kell indokolnotok, hogy más lehetőség nincs. A dátumokban a hónapot és a napot is mindig két számjeggyel írjuk, például 2018. 09. 04.

Megoldás: Haladjunk végig rendszerezetten az eseteken. Kezdjük az évszámokkal: ami szóba jön, az a 2013, 2020, 2021 és 2023, mivel a többi 2013 és 2023 közti évszámban vagy van 3-nál nagyobb számjegy, vagy a 2022, amiben három darab 2-es szerepel.

- 2013: Még szükségünk van a 0, 1, 2 és 3 számjegyekből mindegyikből pontosan egyre. Így a hónap lehet 01, 02, 03, 10 vagy 12. Ezeket végignézve, az első esetben csak 01.23. lehet, a másodikban 02.13. az egyetlen, a harmadikban 03.12. és 03.21. is jó, a negyedikben 10.23. és az utolsóban lehet 12.03. és 12.30. is.

- 2020: Ebben az esetben még két darab 1-es és két darab 3-as számjegyet kell tartalmaznia a dátumnak. A hónapok közül egyedül a 11. jön szóba, ám 11.33. nem egy létező dátum, így ebben az esetben nincs megoldás.

- 2021: Szükség van még egy 0-ásra, egy 1-esre és két 3-asra. A szóba jövő hónapok a 01, 03 és 10. Ám ezek közül az első és utolsó nem lehet, mert 01.33. és 10.33. nem létezik, tehát csak a 03.13. és 03.31. a megfelelő dátumok.

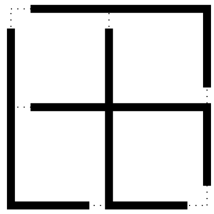
- 2023: Ekkor még egy darab 0-ásra, két 1-esre és egy 3-asra van szükségünk. Számos ilyen dátum lenne, de szerencsére csak a verseny napjáig, azaz 01.13-ig kell megvizsgálni, és addig nincs megfelelő dátum.

Összefoglalva, a feltételeket kielégítő dátumok a következők:

- 2013.01.23.
- 2013.02.13.
- 2013.03.12.
- 2013.03.21.
- 2013.10.23.
- 2013.12.03.
- 2013.12.30.
- 2021.03.13.
- 2021.03.31.

Megjegyzés: Természetesen egy megoldás akkor is 12 pontot ért, ha csak felsorolta a megfelelő dátumokat, és nem indokolta, hogy más nem lehet.

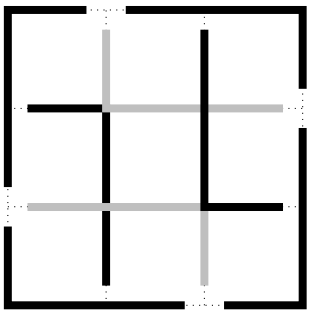
A2. Poszeidón és Zeusz szeretnének amőbát játszani. A pálya elkészítéséhez olyan L alakú szívószálakat használnak, melynek szárai 2 és 1 egység hosszúak, közte pedig derékszögben törnek meg. Poszeidón az ábrán látható módon elkészített egy 2×2-es rácsot néhány szívószál segítségével. Tudnak-e készíteni ugyanilyen szívószálakkal



a) 3×3-as,
b) 4×4-es négyzetrácsot?

A négyzetrácsot úgy szeretnék elkészíteni, hogy minden kis négyzetnek az oldala 1 egység hosszú legyen, és minden vonalat pontosan egy szívószál fedjen. A szívószálakat akárhogyan lehet mozgatni, és keresztezhetik is egymást, de minden darabjuk legyen része az amőbapályának. Ha lehetséges, rajzoljatok megoldást, ha pedig nem, akkor indokoljátok, hogy miért nem lehetséges.

Megoldás: a) Lehetséges, például a következő módon:



b) Ez az eset nem lehetséges. Figyeljük meg, hogy egy 4×4-es négyzetrácson a vízszintes vonalak öt sorban vannak, minden sorban négy darab egység hosszú vonal, így összesen 20 darab. Hasonlóan 20 függőleges vonal van, tehát összesen 40 darab egység hosszú vonalból áll az ábra. Minden szívószál pontosan 3 darabot fed le, és a 40 nem osztható 3-mal maradék nélkül, vagyis nem tudjuk szívószálakkal lefedni a 4×4-es négyzetrácsot.

A3. Amikor Luca reggel elindult az iskolába, mindhárom órája a pontos időt mutatta. Napközben volt egy áramszünet, így amikor délután hazaérkezett, az asztalán lévő digitális óra 14:40-et, a rádió órája 16:25-öt, a faliórája pedig negyed ötöt mutatott. Luca tudja, hogy az áramszünet a falióra működését nem befolyásolja, viszont a digitális óra és a rádió órája kikapcsol, és amikor visszajön az áram, akkor a rádió órája 12:00-tól újraindul, míg a digitális órája attól az időponttól halad tovább, ahol az áramszünet kezdetekor leállt. Mikor kezdődött és milyen hosszú volt az áramszünet Luca otthonában, ha tudjuk, hogy csak egyszer ment el az áram napközben?

Azt is írjátok le, hogy hogyan jöttetek rá a megoldásra.

Megoldás: A falióra a pontos időt mutatja, tehát 16:15 volt, amikor Luca hazaért, a digitális óra pedig ekkor 14:40-et mutatott. A kettő közötti különbség 1 óra 35 perc, a digitális óra ennyi időt "hagyott ki", tehát 1 óra 35 percig tartott az áramszünet. A rádió órája 12:00-tól indult újra, és 16:25-öt mutatott, amikor Luca hazaért. Ez 10 perccel több, mint a pontos idő, ami azt jelenti, hogy 11:50-kor ért véget az áramszünet, és ekkor indult el a valós 11:50 helyett 12:00-tól a rádió órája. Így 11:50-ből levonva az 1 óra 35 percet megkapjuk, hogy 10:15 volt az áramszünet kezdete. Tehát az áramszünet 10:15-kor kezdődött, és 1 óra 35 percig tartott.

A4. Az ókori Ithakában 11, 21 és 31 petákos pénzérmék voltak forgalomban. Legkevesebb hány pénzérmét kellett használnia Plutosznak ahhoz, hogy pontosan kifizessen 2023 petákot?
Plutosz nem kap visszajárót. Indokoljátok a megoldásotokat.

Megoldás: Látható, hogy mindhárom pénzérme értékének a 10-zel való osztási maradéka 1. Tehát a Plutosz által felhasznált érméket tekinthetjük úgy, hogy nem 11, 21 és 31 az értékük, hanem 10, 20 és 30, és még hozzáadjuk az összeghez az érmék számát. Így az érmék értékei nem befolyásolják a kifizetett összeg tízes maradékát, csak az érmék száma. A kifizetendő 2023 utolsó számjegye a 3, vagyis akárhogyan is fizet Plutosz, a felhasznált érmék száma is 3-ra fog végződni.

Nézzük meg, hogy legalább hány darab pénzérmével fizethet Plutosz. Könnyen látható, hogy 66 darab érme legalább szükséges, mivel ha csak 65 érmét használna, akkor a legnagyobb értékű, 31 petákosokkal is legfeljebb $65 \cdot 31 = 2015$-t tud fizetni.

Ebből a kettő megállapításból látható, hogy legkevesebb 73 darab érmére mindenképpen szüksége van Plutosznak. Ennyi azonban tényleg elegendő is, mivel ha 24 darab 21 petákos és 49 darab 31 petákos érmét használ, akkor éppen $24 \cdot 21 + 49 \cdot 31 = 2023$ petákot fizet. Tehát Plutosznak legkevesebb 73 darab érmét kellett használnia, hogy pontosan 2023 petákot fizessen.

A5. Hanga szeretné felrakni a 9 kedvenc képét a falra. A szögeket már beütötte a falba az ábrán látható 3×3-as elrendezésben. Tomi azt szeretné, ha a képek a falon úgy helyezkednének el, hogy bármely két vízszintesen vagy függőlegesen szomszédos kép közt a távolság 20 vagy 30 cm legyen. Hogyan tudja Hanga a képeket felrakni úgy, hogy teljesítse Tomi kívánságát?

A falon és a képeken a szögek helyét a pöttyök jelölik. Az ábrán minden rácsnégyzet oldalának hossza 10 centiméternek felel meg. Az ábrát és a képeket egy külön lapon találjátok. Írjátok le azt is, hogy hogyan gondolkodtatok.

Megoldás: Mivel a képek felső élét a szögek miatt ismerjük, ezért a felső két sorban tudjuk, hogy meddig lóghatnak le a képek. A felső és középső sor szög közt 50 cm távolság van, ezért a felső sorba csak 20 vagy 30 cm magas képek kerülhetnek. Ugyanígy a középső és alsó sor szög közt 60 cm a távolság, így a középső sorba csak 30 vagy 40 cm magas képek jöhetnek.

Most nézzük a szélességi korlátokat. Láthatjuk, hogy minden kép esetén a szög középen szerepel. Nevezzük egy kép *szélességének* azt, hogy a kép széle milyen messze van a szög helyétől. (Például az A kép esetén 30 cm, a B kép esetén 10 cm.) Mivel a bal és középső oszlop közt 80 cm van, így az egy sorba kerülő bal és középső képek szélességei összegének 50 vagy 60 cm-nek kell lennie. A középső és jobb oldali képek közt 90 cm van, így oda összesen 60 vagy 70 cm szélességű képeknek kell kerülnie egy sorba.

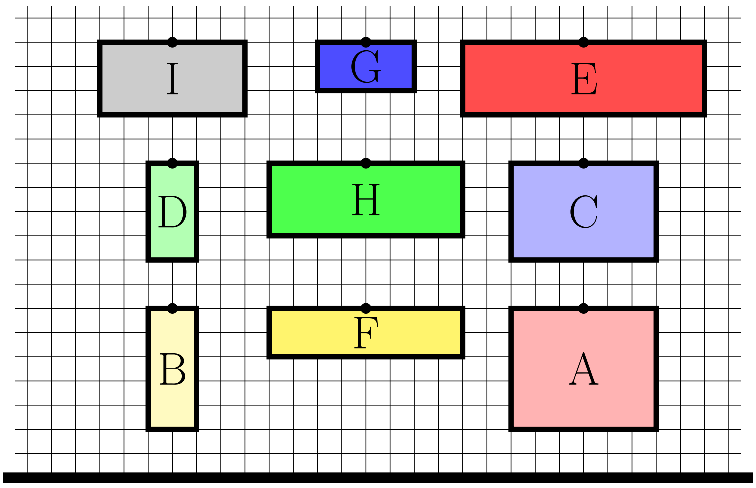
1. észrevétel: Az 50 cm magas képek (A és B) csak az alsó sorba kerülhetnek. Mivel ezek szélessége 30 és 10 cm, ezek nem kerülhetnek egymás mellé, így a két szélére kell kerülniük. Ha a 30 cm-es kerülne a bal oszlopba, akkor mellé egy maximum 30 cm széles kép kerülhet, de akkor a 10 cm-es képet nem tudnánk a jobb oszlopba rakni. Vagyis a 10 cm-es (B) kép lesz bal alul, a 30 cm-es (A) kép pedig jobb alul, közéjük pedig egy 40 cm széles képnek kell kerülnie. Keskenyebb kép a bal, szélesebb kép a jobb oldal miatt nem kerülhet.

2. észrevétel: A magasságuk miatt a C és D képek nem kerülhetnek a felső sorba, a szélességük miatt pedig nem jöhetnek az alsó sor közepére sem. Vagyis mindketten a középső sorba kerülnek. Ennek a két képnek a szélessége 30 és 10 cm, így ugyanazt a gondolatmenetet végigvezethetjük, mint az alsó sor esetén: a C kép kerül a középső sor jobb oldalára, a D pedig balra, közéjük pedig egy 40 cm széles képnek kell kerülnie.

3. észrevétel: Két darab 40 cm széles kép van (F és H), és két helyre is csak ilyen kép jöhet (a középső és alsó sor közepe). A képek magassága miatt az F nem kerülhet a középső sorba, így az F az alsó, míg a H a középső sorba fog kerülni.

4. észrevétel: Három képünk maradt a felső sorba: E, G és I. Ezek szélessége 50, 20 és 30 cm. Úgy kéne felrakni, hogy bal oldalon 50 vagy 60, jobb oldalon 60 vagy 70 cm legyen a szélességek összege. Ebből látszik, hogy az 50 cm-es kép (E) csak jobbra kerülhet, és melléje középre a 20 cm-es képnek (G) kell kerülnie. Így már csak az I kép maradt, ami a bal felső sarokba kerül.

Tehát csak az alábbi elrendezés lehetséges, és ellenőrizhető, hogy ez megfelel minden feltételnek.



A6. **(Játék)** Van öt mező, melyek mindegyike össze van kötve néhány másikkal egy vonallal. Kezdetben mind az öt mező üres. Egy lépésben az éppen soron lévő játékos kiválaszt egy vonalat, melynek a két végpontján lévő mezőben ugyanannyi korong van, és az egyik végpontjára rak még egy korongot. A játék akkor ér véget, ha nincs olyan vonal, aminek a két végén ugyanannyi korong van. Az a játékos nyer, aki az utolsó korongot rakta le.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás:

Nevezzük el a mezőket a következő módon: a két mező, aminek három szomszédja van, legyen A és B, a másik három, aminek két-két szomszédja van, legyen C, D, E. Észrevehetjük, hogy az előbbi kettő mező ugyanolyan tulajdonságú, hiszen ugyanazokkal a mezőkkel vannak összekötve. Ugyanígy az utóbbi három is ugyanolyan.

A kezdőnek van nyerő stratégiája. Első lépésben nem rakhat az A mezőre, ekkor Második a B mezőre rakva nyer, ugyanígy, ha Kezdő B-re rak, akkor a második A-ra rak és ő nyer. Azaz első lépésként a C, D, E mezők valamelyikére kell rakni, rakjunk a C-re.

Ekkor ha Második D-re rak, Kezdő E-re rakva nyer, ha Második E-re rak, Kezdő D-re rakva nyer. Azaz Másodiknak, hogy ne veszítsen azonnal, A-ra vagy B-re kell raknia, mivel ezek ugyanolyan tulajdonságúak feltehetjük, hogy A-ra rak.

Most Kezdő rakja fel A-ra a második korongot. Ekkor Második ha B-re rak, akkor kezdő B-re felrakva a második korongot nyer. Ha Második D-re rak, kezdő E-re rakva nyer. Ha Második E-re rak, kezdő D-re rakva nyer. Második viszont csak erre a három csúcsra rakhat, így mindenképpen nyer a Kezdő.

Megjegyzés:

Amennyiben Kezdő a második lépésében nem A-ra rak, Második nyerne: Ha B-re rak, akkor Második rakjon D-re. Ekkor már E-re nem fog korong kerülni, hiszen soha nem lesz olyan szomszédja, amin ugyancsak 0 korong van. Ha Kezdő D-re rak, akkor Második rakjon B-re. Ekkor már E-re nem fog korong kerülni, hiszen soha nem lesz olyan szomszédja, amin ugyancsak nulla korong van. Ha Kezdő E-re rak, akkor Második rakjon B-re. Ekkor már D-re nem fog korong kerülni, hiszen soha nem lesz olyan szomszédja, amin ugyancsak nulla korong van.

Mindhárom esetben a következő szituáció áll fenn: van négy mező, mindegyiken egy-egy koronggal, amik mint egy négyzet négy csúcsa vannak összekötve, és egy különálló, üres mező (D vagy E), amire már nem tudunk korongot rakni. Ekkor most Kezdő a négy mező egyikére tudja felrakni a második korongot. Ezután Második az ezzel nem összekötött mezőre rakja fel a második korongot, és így ő nyer.