B1. Zsófi észrevette, hogy a mai dátumban (2023. 01. 13.) a 0, 1, 2 és 3 számjegyek mind kétszer szerepelnek. Soroljátok fel azokat a dátumokat az elmúlt tíz évben (2013. 01. 13. óta, a mai dátumot nem számítva), amik szintén pontosan kétszer tartalmazzák a 0, 1, 2 és 3 számjegyek mindegyikét.

A dátumokat elég felsorolnotok; azt nem kell indokolnotok, hogy más lehetőség nincs. A dátumokban a hónapot és a napot is mindig két számjeggyel írjuk, például 2018. 09. 04.

Megoldás: Haladjunk végig rendszerezetten az eseteken. Kezdjük az évszámokkal: ami szóba jön, az a 2013, 2020, 2021 és 2023, mivel a többi 2013 és 2023 közti évszámban vagy van 3-nál nagyobb számjegy, vagy a 2022, amiben három darab 2-es szerepel.

- 2013: Még szükségünk van a 0, 1, 2 és 3 számjegyekből mindegyikből pontosan egyre. Így a hónap lehet 01, 02, 03, 10 vagy 12. Ezeket végignézve, az első esetben csak 01.23. lehet, a másodikban 02.13. az egyetlen, a harmadikban 03.12. és 03.21. is jó, a negyedikben 10.23. és az utolsóban lehet 12.03. és 12.30. is.

- 2020: Ebben az esetben még két darab 1-es és két darab 3-as számjegyet kell tartalmaznia a dátumnak. A hónapok közül egyedül a 11. jön szóba, ám 11.33. nem egy létező dátum, így ebben az esetben nincs megoldás.

- 2021: Szükség van még egy 0-ásra, egy 1-esre és két 3-asra. A szóba jövő hónapok a 01, 03 és 10. Ám ezek közül az első és utolsó nem lehet, mert 01.33. és 10.33. nem létezik, tehát csak a 03.13. és 03.31. a megfelelő dátumok.

- 2023: Ekkor még egy darab 0-ásra, két 1-esre és egy 3-asra van szükségünk. Számos ilyen dátum lenne, de szerencsére csak a verseny napjáig, azaz 01.13-ig kell megvizsgálni, és addig nincs megfelelő dátum.

Összefoglalva, a feltételeket kielégítő dátumok a következők:

- 2013.01.23.
- 2013.02.13.
- 2013.03.12.
- 2013.03.21.
- 2013.10.23.
- 2013.12.03.
- 2013.12.30.
- 2021.03.13.
- 2021.03.31.

Megjegyzés: Természetesen egy megoldás akkor is 12 pontot ért, ha csak felsorolta a megfelelő dátumokat, és nem indokolta, hogy más nem lehet.

B2. Amikor Luca reggel elindult az iskolába, mindhárom órája a pontos időt mutatta. Napközben volt egy áramszünet, így amikor délután hazaérkezett, az asztalán lévő digitális óra 14:40-et, a rádió órája 16:25-öt, a falióráia pedig negyed ötöt mutatott. Luca tudja, hogy az áramszünet a falióra működését nem befolyásolja, viszont a digitális óra és a rádió órája kikapcsol, és amikor visszajön az áram, akkor a rádió órája 12:00-tól újraindul, míg a digitális órája attól az időponttól halad tovább, ahol az áramszünet kezdetekor leállt. Mikor kezdődött és milyen hosszú volt az áramszünet Luca otthonában, ha tudjuk, hogy csak egyszer ment el az áram napközben?

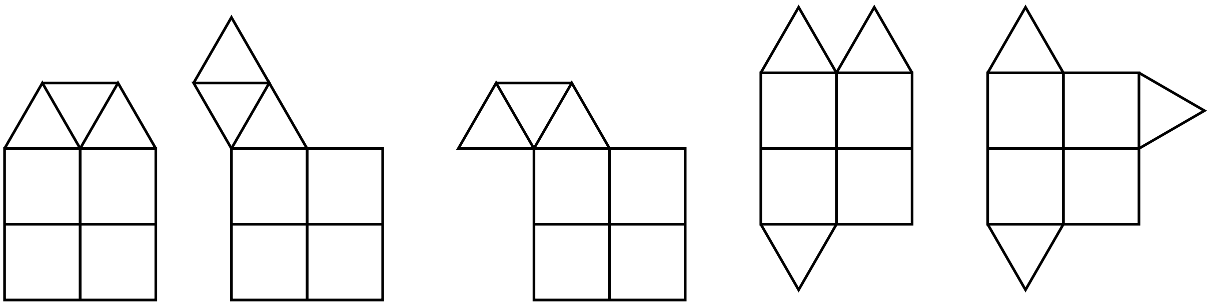
Azt is írjátok le, hogy hogyan jöttetek rá a megoldásra.

Megoldás: A falióra a pontos időt mutatja, tehát 16:15 volt, amikor Luca hazaért, a digitális óra pedig ekkor 14:40-et mutatott. A kettő közötti különbség 1 óra 35 perc, a digitális óra ennyi időt "hagyott ki", tehát 1 óra 35 percig tartott az áramszünet. A rádió órája 12:00-tól indult újra, és 16:25-öt mutatott, amikor Luca hazaért. Ez 10 perccel több, mint a pontos idő, ami azt jelenti, hogy 11:50-kor ért véget az áramszünet, és ekkor indult el a valós 11:50 helyett 12:00-tól a rádió órája. Így 11:50-ből levonva az 1 óra 35 percet megkapjuk, hogy 10:15 volt az áramszünet kezdete. Tehát az áramszünet 10:15-kor kezdődött, és 1 óra 35 percig tartott.

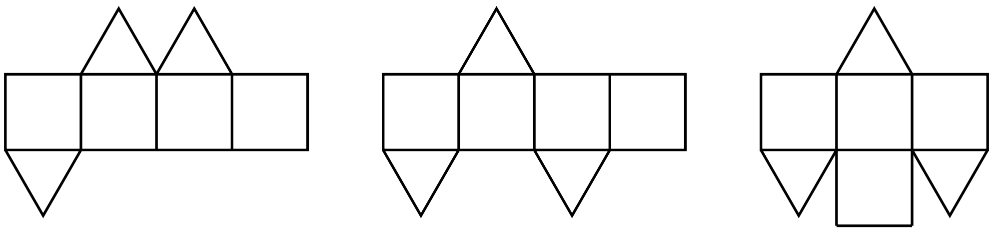
B3. Bence négy egységoldalú négyzetből és három egységoldalú szabályos háromszögből készített alakzatot a síkban. Hány csúcsú lehet a kapott alakzat, ha Bence az építkezés során mind a hét elemet felhasználta, és az érintkező elemek teljes oldallal csatlakoznak egymáshoz?

A Bence által készített alakzat egybefüggő, nincs benne lyuk, és a darabok nem fedik egymást. Mutassatok alakzatot a csúcsok számának minél több lehetőségére. Azt nem kell bizonyítanotok, hogy más lehetőség nem létezik.

Megoldás: A válasz az, hogy 6-tól 13-ig minden lehetséges. Ezeket például az alábbi módon lehet megkapni:



6 csúcs 7 csúcs 8 csúcs 9 csúcs 10 csúcs



11 csúcs 12 csúcs 13 csúcs

A teljesség kedvéért adunk egy indoklást, hogy miért nem lehet más. Először igazoljuk, hogy egy így kapott sokszögnek nem lehet 13-nál több csúcsa. A négy négyzetnek és három háromszögnek összesen $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 25$ éle van. Építsük fel úgy az alakzatot, hogy lerakunk kezdetben egy négyzetet, és minden lépésben hozzácsatolunk a már meglévő alakzatunkhoz még egy négyzetet vagy háromszöget. Egy lépésben egy már meglévő élhez csatlakoztatunk egy él mentén egy új négyzetet vagy háromszöget, tehát minden lépésben keletkezik egy csatlakoztatott él. Így összesen lesz legalább hat ilyen él, mindegyik mentén két kis négyzet vagy háromszög éle illeszkedik, azaz az eredeti 25 éléből a négyzeteknek és háromszögeknek legalább $2 \cdot 6 = 12$ éle csatlakoztatott, így legfeljebb 13 éle van a sokszögnek. Ám tetszőleges sokszögnek ugyanannyi éle van, mint csúcsa, így legfeljebb 13 csúcsú sokszöget kaphattunk.

Most belátjuk, hogy hatnál kevesebb csúcsa nem lehet a sokszögnek. Ez egy fokkal bonyolultabb gondolatmenet lesz. Tegyük fel, hogy készítettünk egy sokszöget, és tekintsük valamelyik építőelemnek (egy négyzetnek vagy háromszögnek) egy csúcsát. Nevezzük ezt a csúcsot *megbúvónak*, ha ez a csúcs nem a keletkező sokszög valamelyik csúcsa.

Gondoljuk meg, hogy a három háromszög összesen kilenc csúcsa közül legalább hat nem megbúvó. Ugyanis egy megbúvó csúcsnál a nagy sokszögnek vagy egy 180°-os szögének kell lennie, vagy ez a csúcs egyáltalán nincs a sokszög kerületén, azaz az itt található csúcsok a teljes 360°-ot kitöltik. Ezek alapján, ha egy háromszög csúcs megbújik, akkor ott még legalább két háromszögnek kell találkoznia, mivel egy vagy két 60°-os szöget nem lehet a négyzetek 90°-os szögeivel 180°-os vagy 360°-os szögre egészíteni. Így mivel összesen három darab háromszög van, ezért vagy egy csúcsuk sem bújik meg, vagy három, méghozzá úgy, hogy a három háromszögnek van egy közös csúcsa, tehát legalább hat nem megbúvó.

Ehhez hasonlóan vizsgáljuk meg, hogy hogyan bújhat meg egy négyzet egy csúcsa. Ez is akkor lehet, ha az ott találkozó csúcsok 180°-os vagy 360°-os szöget zárnak be együttesen, ami úgy lehet, hogy ebben a csúcsban vagy két négyzet találkozik, vagy négy négyzet, vagy két négyzet és három háromszög. Figyeljük meg, hogy ezek alapján minden megbúvó négyzet csúcs pontosan kettő vagy négy négyzetnek a csúcsa. Egy pillanatra hagyjuk figyelmen kívül a háromszögeket, és tekintsük csak a négy darab négyzet által alkotott alakzatot. Ez nem feltétlenül egy sokszög, de meggondolható, hogy mindenképpen lesz négy olyan csúcs, ami csak egy négyzetnek a csúcsa. Ez úgy látható, hogy egy kicsit elforgatjuk az ábrát úgy, hogy egyik négyzetnek se legyen függőleges vagy vízszintes oldala. Ezek után ha nézzük a legfelső, legalsó, legjobbrább lévő és legbalrább lévő csúcsokat, akkor azok nem lehetnek több négyzetnek is csúcsai, ezzel találtunk négy megfelelő csúcsot. Visszatéve a háromszögeket, a korábbi megfigyeléseink alapján a talált négy csúcs nem lehet megbúvó.

Összesen tehát biztosan tudunk találni hat háromszög és négy négyzet csúcsot, amik nem megbúvóak, azaz ezek a keletkező sokszög csúcsaihoz járulnak hozzá. Tehát legalább $6 \cdot 60° + 4 \cdot 90° = 720°$-kot adnak hozzá a talált nem megbúvó csúcsok a kapott sokszög belső szögösszegéhez. A hatnál kevesebb csúcsú sokszögek belső szögösszege 720°-nál kevesebb (háromszögnek 180°, négyszögnek 360°, ötszögnek 540°), így tényleg legalább hat csúcsa van a kapott sokszögnek.

B4. Hanga szeretné felrakni a 9 kedvenc képét a falra. A szögeket már beütötte a falba az ábrán látható 3×3-as elrendezésben. Tomi azt szeretné, ha a képek a falon úgy helyezkednének el, hogy bármely két vízszintesen vagy függőlegesen szomszédos kép közt a távolság 20 vagy 30 cm legyen. Hogyan tudja Hanga a képeket felrakni úgy, hogy teljesítse Tomi kívánságát?

A falon és a képeken a szögek helyét a pöttyök jelölik. Az ábrán minden rácsnégyzet oldalának hossza 10 centiméternek felel meg. Az ábrát és a képeket egy külön lapon találjátok. Írjátok le azt is, hogy hogyan gondolkodtatok.

Megoldás: Mivel a képek felső élét a szögek miatt ismerjük, ezért a felső két sorban tudjuk, hogy meddig lóghatnak le a képek. A felső és középső sor szög közt 50 cm távolság van, ezért a felső sorba csak 20 vagy 30 cm magas képek kerülhetnek. Ugyanígy a középső és alsó sor szög közt 60 cm a távolság, így a középső sorba csak 30 vagy 40 cm magas képek jöhetnek.

Most nézzük a szélességi korlátokat. Láthatjuk, hogy minden kép esetén a szög középen szerepel. Nevezzük egy kép *szélességének* azt, hogy a kép széle milyen messze van a szög helyétől. (Például az A kép esetén 30 cm, a B kép esetén 10 cm.) Mivel a bal és középső oszlop közt 80 cm van, így az egy sorba kerülő bal és középső képek szélességei összegének 50 vagy 60 cm-nek kell lennie. A középső és jobb oldali képek közt 90 cm van, így oda összesen 60 vagy 70 cm szélességű képeknek kell kerülnie egy sorba.

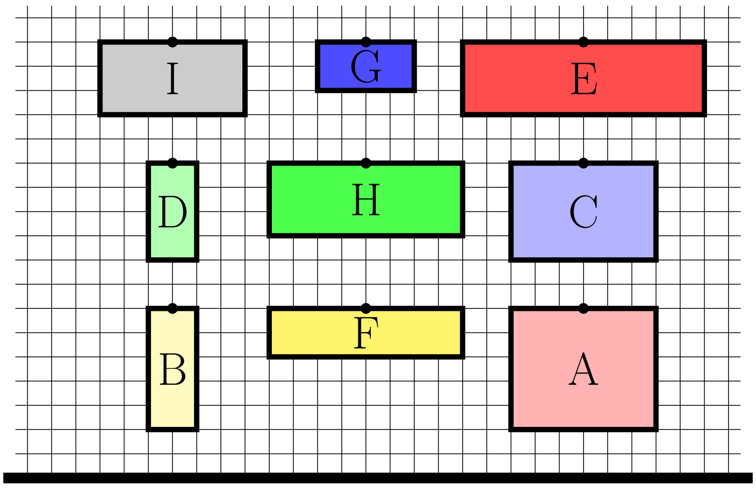
1. észrevétel: Az 50 cm magas képek (A és B) csak az alsó sorba kerülhetnek. Mivel ezek szélessége 30 és 10 cm, ezek nem kerülhetnek egymás mellé, így a két szélére kell kerülniük. Ha a 30 cm-es kerülne a bal oszlopba, akkor mellé egy maximum 30 cm széles kép kerülhet, de akkor a 10 cm-es képet nem tudnánk a jobb oszlopba rakni. Vagyis a 10 cm-es (B) kép lesz bal alul, a 30 cm-es (A) kép pedig jobb alul, közéjük pedig egy 40 cm széles képnek kell kerülnie. Keskenyebb kép a bal, szélesebb kép a jobb oldal miatt nem kerülhet.

2. észrevétel: A magasságuk miatt a C és D képek nem kerülhetnek a felső sorba, a szélességük miatt pedig nem jöhetnek az alsó sor közepére sem. Vagyis mindketten a középső sorba kerülnek. Ennek a két képnek a szélessége 30 és 10 cm, így ugyanazt a gondolatmenetet végigvezethetjük, mint az alsó sor esetén: a C kép kerül a középső sor jobb oldalára, a D pedig balra, közéjük pedig egy 40 cm széles képnek kell kerülnie.

3. észrevétel: Két darab 40 cm széles kép van (F és H), és két helyre is csak ilyen kép jöhet (a középső és alsó sor közepe). A képek magassága miatt az F nem kerülhet a középső sorba, így az F az alsó, míg a H a középső sorba fog kerülni.

4. észrevétel: Három képünk maradt a felső sorba: E, G és I. Ezek szélessége 50, 20 és 30 cm. Úgy kéne felrakni, hogy bal oldalon 50 vagy 60, jobb oldalon 60 vagy 70 cm legyen a szélességek összege. Ebből látszik, hogy az 50 cm-es kép (E) csak jobbra kerülhet, és melléje középre a 20 cm-es képnek (G) kell kerülnie. Így már csak az I kép maradt, ami a bal felső sarokba kerül.

Tehát csak az alábbi elrendezés lehetséges, és ellenőrizhető, hogy ez megfelel minden feltételnek.



B5. Az ókori Ithakában 16, 31 és 61 petákos pénzérmék voltak forgalomban. Legkevesebb hány pénzérmét kellett használnia Plutosznak ahhoz, hogy pontosan kifizessen 2023 petákot?
Plutosz nem kap visszajárót. Indokoljátok a megoldásotokat.

Megoldás: Észrevehető, hogy mindhárom érték 15-tel való osztási maradéka 1. Tehát a Plutosz által felhasznált érméket tekinthetjük úgy, hogy nem 16, 31 és 61 az értékük, hanem 15, 30 és 60, és még hozzáadjuk az összeghez az érmék számát. Így az érmék értékei nem befolyásolják a kifizetett összeg 15-tel vett osztási maradékát, csak az érmék száma. A kifizetendő 2023-t ha elosztjuk 15-tel, akkor 13 a maradék, vagyis akárhogyan is fizet Plutosz, a felhasznált érmék száma is 13 maradékot fog adni 15-tel osztva.

Nézzük meg, hogy legalább hány darab pénzérmével fizethet Plutosz. Könnyen látahtó, hogy 34 darab érme legalább szükséges, mivel ha csak 33 érmét használna, akkor a legnagyobb értékű, 61 petákosokkal is legfeljebb $33 \cdot 61 = 2013$-t tud fizetni.

Ebből a kettő megállapításból kapjuk, hogy legkevesebb 43 darab érmére mindenképpen szüksége van Plutosznak, mivel ez a legkisebb olyan szám, ami nem kisebb 34-nél, és 15-tel osztva 13-t ad maradékul. Ennyi azonban tényleg elegendő is, mivel ha 20 darab 31 petákos és 23 darab 61 petákos érmét használ, akkor éppen $20 \cdot 31 + 23 \cdot 61 = 2023$-t fizet. Tehát Plutosznak legkevesebb 43 darab érmére van szüksége.

B6. **(Játék)** Van négy mező, melyek mindegyike össze van kötve néhány másikkal egy vonallal. Kezdetben mind a négy mező üres. Egy lépésben az éppen soron lévő játékosnak két lehetősége van:

- Választ egy mezőt, amin nincs korong, és rak oda egyet.
- Választ egy vonalat, melynek a két végpontján lévő mezőben ugyanannyi korong van, és az egyik végpontjára rak még egy korongot.

A játék akkor ér véget, ha nincs üres mező és nincs olyan vonal, aminek a két végén ugyanannyi korong van. Az a játékos nyer, aki az utolsó korongot rakta le.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás:

Három észrevétellel kezdjük a megoldást. Ezeket nem feltétlenül szükséges tudni ahhoz, hogy találjunk egy nyerő stratégiát. Az is egy megoldás, ha hosszan elemezzük a játékot, végignézzük az eseteket, és találunk egy stratégiát, amit játszva az ellenfél mindenképpen veszít. Azonban az észrevételek mélyebb bepillantást engednek a játék érzékeny természetébe, megértésükkel jobban átlátjuk a játékot, és egyszerűbb nyerő stratégiákat is tudunk adni. Az észrevételek után két megoldást is leírunk.

Első észrevétel: A két mező, amiknek három szomszédjuk van, teljesen azonos tulajdonságokkal rendelkeznek, legyenek ezek az A és a B mezők. Ugyanígy, az a két mező, amiknek két-két szomszédjuk van, szintén pont ugyanolyanok, legyenek ezek a C és a D mezők.

Második észrevétel:

Ha megnézzük melyik mezőn hány korong van és növekvő sorrendbe rakjuk, akkor ezek nem ugorhatnak át számot, azaz például olyan nem lehet, vagy valamelyik mezőn egy korong van, valamelyiken három, de nincs olyan, amin kettő. Ez könnyen látszik, mivel egy mezőre csak úgy tudunk rárakni egy harmadik korongot, ha valamelyik másik mezőn kettő marad.

Emiatt nem nehéz végiggondolni, hogy a játék végén csak a következő állások lehetségesek:

1. eset: A mezőkön 1, 2, 3 és 4 korong van valamilyen sorrendben.

2. eset: Az A és B mezőkön 1 illetve 2 korong van, a C és D mezőkön 3-3 korong van.

3. eset: Az A és B mezőkön 2 illetve 3 korong van, a C és D mezőkön 1-1 korong van.

4. eset: Az A és B mezőkön 1 illetve 3 korong van, a C és D mezőkön 2-2 korong van.

Harmadik észrevétel: A játék végeredménye egy dolgon múlik: amennyiben végül páros korong van a táblán, Második nyert, hiszen ő rak le minden párosadik számú korongot, míg ha összesen páratlan, akkor pedig Kezdő nyert. Ez alapján a 2. és 3. esetben Kezdő nyer, az 1. és a 4. esetben pedig Második.

1. megoldás:

A második játékosnak van nyerő stratégiája. A nyerő stratégia a következő: Ha Kezdő bármely lépésében az A vagy a B mezőre rak korongot, akkor a rákövetkező lépésben Második a C vagy D mezők egyikére rak és fordítva, azaz ha Kezdő bármely lépésében a C vagy a D mezőre rak korongot, akkor a rákövetkező lépésben Második az A vagy a B mezők egyikére rak. Ha ezt Második tényleg meg tudja tenni, akkor minden lépés után A-n és B-n összesen legfeljebb eggyel térhet el a korongok száma a C-n és D-n összesen lévő korongok számától, így a játék végén csak az *1.* és a *4. eset* lehet, amikor tényleg Második nyer. Így már csak azt kéne ellenőrizni, hogy tényleg mindig tud így játszani a Második. Ennek a stratégiának az előnye, hogy nagyon könnyű játszani. Hátránya, hogy nem könnyű megindokolni, hogy mindig működik, de azért leírunk egy indoklást.

Azt kell látnunk, hogy sosem alakulhat ki olyan szituáció, hogy Második ezt a stratégiát játsza, és valamikor nem tud lépni. A játék legelején képes erre. Tegyük fel, hogy egy ideig meg tudta tenni ezt, és még Kezdő tud lépni. Ez azt jelenti, hogy vagy A-n és B-n, vagy például A-n és C-n ugyanannyi korong van. Ha A-n és B-n volt ugyanannyi korong, akkor C és D közül az egyiken eggyel több, a másikon eggyel kevesebb van a korábbi megfigyelések miatt. Ekkor ezek egyikével egyenlő lesz A és

B közül a megnövelt mező. A második esetben, ha két különböző típusú, azaz mondjuk A és C a növelő él két vége, a következő gondolattal folytatjuk a megoldást: Mivel A-n és B-n ekkor összesen ugyanannyi korong van, mint C-n és D-n együtt, így B-n és D-n is ugyanannyi korong van. Tehát ha Kezdő A-ra rak, akkor Második D-re és fordítva, ha kezdő B-re rak, akkor Második C-re és fordítva. Tehát továbbra is meg tudja ezt tenni Második, azaz így meg tudja nyerni a játékot.

2. megoldás:

A nyerő stratégia a következő: Először a *2. eset* létrejöttét akadályozza meg Második. Ezt úgy teszi, hogy eléri, hogy C-n vagy D-n két korong legyen. Ha Kezdő az első lépésében C-re vagy D-re rak, akkor Második ezután A-ra fog. Ha Kezdő A-ra vagy B-re rak, akkor Második C-re fog, így két lépést követően egyféle állás jöhet létre, az, hogy A-n és C-n is egy-egy korong van. Ha ekkor Kezdő nem A-ra rak, akkor vagy C-re rakta a második korongot, vagy ezután Második fel tudja helyezni ide a második korongot. Ezzel a *2. eset*-et megakadályozta. Ha viszont Kezdő A-ra rak, akkor Második D-re, ekkor Kezdő egyetlen lehetséges lépése, hogy felhelyezi B-re az első korongot, majd Második felrakja C-re a második korongot, ezzel a *2. eset*-et megakadályozva. Így Második meg tudja akadályozni a *2. eset*-et úgy, hogy maximum 6 korong legyen a táblán.

Ezek után kezdőnek már csak a *3. eset* az esélye. Ezt a következőképpen akadályozza meg Második: Ez csak úgy jöhetett létre, ha előtte Kezdő a következő állást látta: A-n 1, B-n 2, C-n 2, D-n 3 korong van, és itt C-re rakott. (Az az állás, hogy A-n és B-n 1-1, C-n és D-n 3-3 korong volt a második észrevétel miatt nem lehetett.) Ezt az állást Második hozta létre. Két állásból tehette ezt meg:

1. lehetőség: A-n egy korong van, B-n, C-n és D-n kettő, ekkor viszont rakjon Második egy korongot B-re, ezzel megnyerve a játékot.

2. lehetőség: A-n és C-n 1-1 korong van, B-n kettő, D-n három, ekkor A-ra rakva A-n és B-n is két korong lesz, azaz a Kezdő által kívánt állás nem jöhet létre.

Az a lehetőség, hogy A-n és B-n 1-1 korong van, C-n 2 és D-n 3, nem jöhet létre, hiszen D-re nem kerülhetett fel harmadik korong, ha nem volt olyan szomszédja, amin 2 korong volt.

A fenti két állás mindegyikében 7 korong van már a táblán, és mivel Második maximum 6 korong táblára kerülése alatt elérte, hogy ne következzen be a *2. eset*, így ettől függetlenül, a két dolog ütközése nélkül meg tudja oldani azt is, hogy ne következzen be a *3. eset*.

Így Második ezzel a stratégiával is nyerhet.