kategória
B
7-8. osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY
Döntő: 2023. január 13-14.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK

B1. Bálint a születésnapjára kapott egy tábla csokit, amely 3×5 kockából áll. Elhatározza, hogy minden nap a meglévő csokinak megeszi valamelyik szélső sorát vagy szélső oszlopát. Legfeljebb hány nap fog tudni enni a csokiból?

Megoldás: A sorok száma plusz az oszlopok száma $3 + 5 = 8$. Mivel mindig a széléből tör le egy sort vagy oszlopot, ez a szám minden nap legalább eggyel csökken. Hat nap után emiatt az összeg legfeljebb kettő, tehát vagy egy 1×1-es csokikockája marad, vagy már el is fogyott az egész csoki. Így legkésőbb a 7. napon biztosan elfogy a csoki. Továbbá az lehetséges, hogy 7 napig kitartson, például ha az első 4 nap 4 oszlopot eszik meg, ezután egy 3×1-es darab marad, amit 3 nap alatt eszik meg, minden nap egy sort. Így a válasz 7.

B2.
Anett meghívta 8 barátját egy társasjátékpartira. A partira egyesével érkeztek meg az emberek, és mindenki az érkezéskor lerakta az általa hozott társasokat vagy a padlóra, vagy valamelyik másik társasjáték tetejére. A nyolcadik vendég megérkezése után az ábrán látható módon álltak a társasok. Hányadikként érkezett meg Benedek a partira?
A nevek a társasokon azt jelölik, hogy ki hozta azt a játékot. A megérkezett emberek közé Anettet nem számoljuk bele.

Orsi		Orsi		Dani
Dani	Luca	Hanga	Luca	Luca
Hanga	Benedek	Kartal	Gábor	Benedek
Andris	Gábor	Andris	Hanga	Kartal

Megoldás: A feladat szövegéből azonnal következik, hogyha Anett egyik barátjának valamelyik társasa rajta van valamelyik másikén, akkor akinek a társasjátéka feljebb van, az érkezett később.

A 2. oszlop miatt Gábor korábban érkezett, mint Benedek, a 4. miatt Hanga Gábornál is korábban jött, továbbá a 3. miatt Kartal és Andris még Hangánál is korábban jött, tehát legalább négyen Benedek előtt érkeztek. Az 5. oszlop miatt Luca és Dani később érkezett Benedeknél, továbbá az 1. oszlop miatt Orsi később jött, mint Dani, így hárman Benedek után érkeztek.

Ezzel mindenkiről tudjuk, hogy Benedek előtt, vagy után érkezett, és négyen érkeztek előtte, így a válasz 5.

B3. Artemisz szeretné összehasonlítani a tárgyainak a tömegét. Azt vette észre, hogy egy hárfa tömege megegyezik egy íj és egy kalapács együttes tömegével. Ezenkívül arra is rájött, hogy hét kalapács tömege megegyezik egy hárfa és két íj tömegével. Hány kalapács tömegével egyezik meg egy hárfa tömege?
Az azonos típusú tárgyak tömege megegyezik.

Megoldás: Hét kalapács tömege megegyezik egy hárfa és két íj tömegével. Helyettesítsük a hárfát egy kalapáccsal és egy íjjal. Tehát hét kalapács tömege megegyezik egy kalapács és három íj tömegéve. Ha mindkét oldalról elveszünk egy kalapácsot, azt kapjuk, hogy hat kalapács tömege három íj tömegével egyezik meg, vagyis egy íj tömege két kalapács tömegével egyenlő. Mivel egy hárfa tömege egy kalapács és egy íj együttes tömegével egyezik meg, így ez három kalapács tömege lesz. A válasz tehát 3.

B4. Egy fagyizóban ötféle fagyi kapható: vanília, karamell, tutti-frutti, rumosdió és kávé. Hányféleképpen lehet összeállítani egy három gombócból álló fagyikelyhet, ha nem akarunk egyszerre karamell és vanília fagyit is kérni?
Két kehely akkor különböző, ha van olyan ízű fagyi, amiből az egyikben több van, mint a másikban. A fagyizóban a pisztácia kifogyott, csokoládé pedig nem is volt.

Megoldás: Először számoljuk meg, hogy hányféle fagylaltkehlyhet lehetne összeállítani, ha nem figyelnénk azt, hogy ne legyen benne karamell és vanília egyszerre, majd ebből vonjuk ki azon kelhyeket, melyekben egyszerre mindkettő benne van.

Ha mindhárom gombóc ugyanaz, akkor ötféle lehet a fagylaltkehely, hiszen ötféle ízű lehet.

Ha két gombóc ugyanolyan ízű, a harmadik pedig más, akkor az az íz, amiből két gombóc is van ötféle lehet, és ezek után négyféleképpen tudjuk kiválasztani azt, amiből egy van, így összesen $5 \cdot 4 = 20$ lehetőség van.

Ha mindhárom különböző ízű, akkor rendszerezetten fel tudjuk sorolni az összes lehetséges kelyhet. Rövidítsük a lehetséges ízeket úgy, hogy v, ka, t, r, ká. Ekkor a lehetséges kelyhek: v-ka-t, v-ka-r, v-ka-ká, v-t-r, v-t-ká, v-r-ká, ka-t-r, ka-t-ká, ka-r-ká, t-r-ká. Tehát összesen 10 lehetőség van. (Erre egy másik szép indoklás: az első gombóc ötféle ízű lehet, a második négyféle, a harmadik háromféle, viszont így minden ilyen kelyhet 6-szor számoltunk, azaz $(5 \cdot 4 \cdot 3)/6 = 10$ lehetőség van.)

Más lehetőség nincs, így a fent kiszámolt értékeket összeadva kapjuk, hogy összesen $5+20+10 = 35$-féle lehet a kehely, ha lehet benne egyszerre karamell és vanília.

Olyan fagylaltkehelyből, melyekben van vanília és karamell is 5 van, hiszen egy ilyen kehelyben a harmadik gombóc ötféle ízű lehet, és ez az ötféle kehely tényleg mind különböző, tehát összesen $35 - 5 = 30$-féle kehely állítható össze az általunk kívánt módon.

B5. Anita megkérdezte Lillát, hogy mikor van a születésnapja, mire Lilla azt felelte, hogy ezt nem árulja el, csak azt, hogy a születésnapjában mennyi a hónap és a nap sorszámának az összege. Ebből az összegből Anita már meg tudta határozni, hogy mikor van Lilla születésnapja. Hány olyan napja van az évnek, amely ezek alapján lehet Lilla születésnapja?
Például május 21-e esetén az 5+21=26-ot, október 8-a esetén a 10+8=18-at mondaná Lilla.

Megoldás: A szám, amit Lilla mondott legalább 2 és legfeljebb 43, hiszen a születési hónapjának a száma legalább 1 és legfeljebb 12, a születési napja legalább 1 és legfeljebb 31, tehát az összeg $1+1 = 2$ és $12+31 = 43$ között van. Ha Lilla 2-t mondott, akkor csak január 1-jén születhetett, ez egy lehetséhes megoldás.

Ha egy 3 és 30 közötti számot mond, akkor a születésnapja januárban és februárban is lehet, például ha 18 a szám, akkor lehet a születésnapja január 17 és február 16 is, és ehhez hasonlóan működik az összes 3 és 30 közötti számra. Így Anita nem tudja biztosan megállapítani Lilla mikor született.

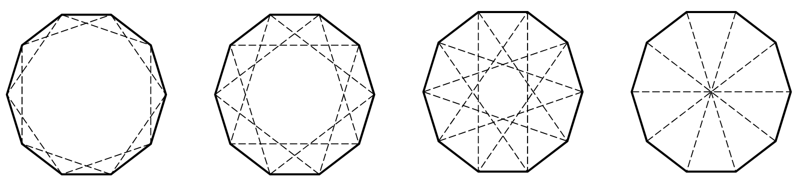
Ha Lilla egy 31 és 41 közötti számot mond, akkor a születésnapja lehet novemberben és decemberben is, például 38 esetén a születésnap lehet november 27-én és december 26-án is.

Ha Lilla 42-et, vagy 43-at mondott, akkor a születésnapja csak december 30-án, illetve 31-én lehet, hiszen a november 30 napos.

Tehát az év 3 napján születhetett Lilla: január 1, december 30 és december 31.

B6. Artemisz rajzolt egy szabályos tízszöget. Apollón berajzolta ennek a tízszögnek az összes átlóját. Hány különböző hosszúságú szakaszt rajzolt be Apollón az átlók megrajzolása közben?

Megoldás: Tekintsük a tízszög két különböző csúcsát. Ezek vagy szomszédosak, vagy egy csúcs van közöttük, vagy kettő, vagy három, vagy négy. Ha abban az irányban tekintjük a köztes csúcsokat, amelyikben kevesebb csúcs van közöttük, akkor 4-nél több nem lehet. Két átló hossza pontosan akkor egyezik meg, ha a végpontjaik között ugyanannyi csúcs van. Ha két szomszédos csúcs között nincs másik csúcs, akkor szomszédosak, tehát nincs átló közöttük. Azaz attól függően, hogy hány csúcs van az átló két végpontja között 4-féle lehet egy átló hossza.



Az ábrák mutatják az átlók összes lehetséges hosszát

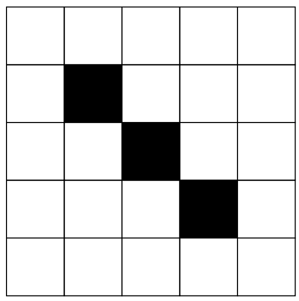
B7. Kristóf Görögországban vonatozik. Amikor felszállt a vonatra, a digitális óráján az óra és a perc megegyezett egymással, és amikor leszállt, akkor is megegyezett egymással ez a két szám. Hányféle lehetett Kristóf utazásának időtartama, ha tudjuk, hogy kevesebb mint 24 óráig, de legalább egy percig tartott?
Kristóf órája az időt 24 órás formátumban mutatja, pl. 00:00 vagy 18:18. Az időtartam kiszámításánál a fel- és leszállás időpontját perc pontossággal nézzük.

Megoldás: Amennyiben Kristóf ugyanazon a naptári napon szállt le, mint amikor felszállt, akkor vagy 1 óra 1 perc, vagy 2 óra 2 perc, vagy ... vagy 23 óra 23 percet utazott a vonaton, hiszen ilyen alakú időponton szállt fel és le is, így ezek különbsége, azaz az utazás hossza is ilyen. Például 3 óra 3 perc és 17 óra 17 perc között 14 óra 14 perc telik el. Továbbá az is igaz, hogy a fent felsorolt időtartamok tényleg előfordulhattak, például ha 00:00-kor szállt fel és a megfelelő órában szállt le.

A másik lehetőség, hogy Kristóf a következő naptári napon szállt le a vonatról mint amikor felszállt. Gondoljuk meg, hogy ha ehelyett még fent maradna a vonaton addig, hogy pontosan egy nap teljen el a felszállásától, akkor még valahány óra és ugyanannyi percig kell fent maradnia (például 11 óra 11 perc). Ez ugyanúgy látható, mint az előző bekezdés gondolatmenetében. Így itt is 23 időtartam lehetséges, a teljes 24 órából kivonhatjuk az 1 óra 1 percet, 2 óra 2 perc, $\ldots$, 23 óra 23 percet. Könnyen látható, hogy így nem kapunk a korábban megtalált megoldásokkal egyezőt, illetve az is, hogy ezek tényleg mind elérhetőek, ha 23:23-kor szállt fel a vonatra, akkor a következő napon 23-féleképpen megválaszthatjuk, hogy mikor száll le, és ez megadja ezt a 23 lehetőséget. Így összesen 46-féle lehetett Kristóf utazásának időtartama.

B8. Egy hangya egy 5×5 mezőből álló táblázat bal alsó sarkából a jobb felsőbe akar eljutni úgy, hogy csak felfelé és jobbra léphet. Három mező ki van színezve, amire nem léphet a hangya. Legkevesebb hányféleképpen teheti meg az utat, ha tudjuk, hogy legalább egyféle útvonal létezik?
A bal alsó és jobb felső sarok nincs kiszínezve.

Megoldás: A kiszínezett mezők legfeljebb három sorban és három oszlopban helyezkednek el, így fog kimaradni legalább két sor és két oszlop, amikben nincs színezett mező. Válasszunk két színezett mező nélküli sort és oszlopot. Ezen soroknak és oszlopoknak van összesen 4 metszéspontja, amik közül nézzük a kezdő és végső helyhez közelebbi metszéspontokat, azaz a bal alsót és jobb felsőt. E két mező közt van legalább kettő út, mivel soraik és oszlopaik üresek, így azokon el tudunk jutni az egyikből a másikba kétféleképpen. Mivel van megoldás, így a kezdő helyről el tudunk jutni a közeli metszésponthoz, mivel annak a sora és oszlopa üres, így az általuk meghatározott téglalapot valahol elmetszi az út, amin végig tud menni a hangya egy megoldás során, onnan pedig el tud menni a metszéspontig. Ugyanígy a jobb felső metszéspontból is el tudunk jutni a célba, vagyis minden színezés esetén legalább kettő út létezik. Erre pedig van példa:



B9. Zsombor rajzolt két pontot a papírlapjára, majd odaadta a lapot Orsinak. Orsi szeretné kiegészíteni a rajzot egy szabályos 24-szöggé, amelynek csúcsai között szerepel a Zsombor által rajzolt két pont. Hányféleképpen teheti ezt meg Orsi?
A papír elég nagy ahhoz, hogy minden lehetséges sokszög ráférjen.

Megoldás:

Legyen a Zsombor által rajzolt 2 pont A és B. Minden ilyen lerajzolásban a két rögzített pont a 24-szög egy oldala vagy átlója. A 24-szög egyik csúcsát rögzítsük le az A pontba. Ekkor a B pontba a sokszög egy másik csúcsa kerül. Könnyen látahtó, hogy mind a 23 maradék csúcs tehető oda, és minden ilyen lerakás esetén már adott, hogy hogyan van elhelyezve a 24-szög, ezért 23 módon egészítheti ki Orsi az ábrát.

B10. Egy kalandor egy törzs főnökétől azt az útbaigazítást kapja, hogy gyalogoljon el a híres Terebélyes Törzsfáig, majd menjen 200 métert arewa irányba, majd 150 métert kudu irányba, majd 100 métert gabas irányba, majd 50 métert yamma irányba, hogy megtalálja a boldogság elixírjét. Azt tudja, hogy az arewa, kudu, gabas és yamma valamilyen sorrendben az észak, dél, kelet és nyugat irányokat jelölik, de nem tudja, milyen sorrendben. A kalandor megtippeli, hogy melyik melyik, majd megteszi az utat. Hányféle helyre érkezhet?
A kalandor végig teljesen sík terepen mozog.

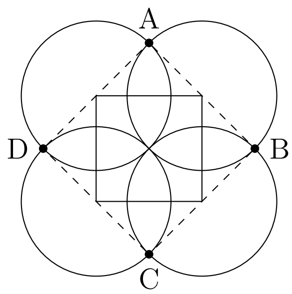
Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy észak-dél és kelet-nyugat irányban mennyit tehet meg. Ha észak és dél közül az egyik 200 méter, a másik 50, akkor összesen 150 métert mozdulunk el észak vagy dél irányba. Ekkor kelet-nyugat irányba összesen 50 métert mozdul el valamelyik irányba, mivel az egyikbe 100 métert megy, a másikba 50-et. Hasonlóan lehet, hogy kelet-nyugat irányba mozdul el 150 métert, és észak-dél irányba 50-et. Ezek összesen nyolc lehetőséget adnak, mivel kiválaszthatjuk, hogy a négy irányból melyikben megyünk 150 métert, és utána két irányban tudjuk megtenni az 50 métert.

Ha észak és dél a 150 és 50 méter valamelyik irányban, akkor kelet és nyugat 100 és 200, így észak-dél és kelet-nyugat irányban is 100 métert mozdulunk el, ami négyféleképpen lehet, észak-kelet, észak-nyugat, dél-kelet vagy dél-nyugat. Ugyanez az eset, ha észak-dél irányban megy 100-at és 200-at valamilyen sorrendben, és kelet-nyugat irányba pedig az 50-et és 150-et.

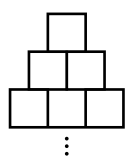
Végül ha északra és délre valamilyen sorrendben 50 és 100 méter megy, akkor kelet-nyugat irányban 150 és 200, így észak-dél és kelet-nyugat irányban is 50 métert halad, és ez az előzőhöz hasonlóan 4 lehetőség. Ugyanezt kapjuk, ha észak-délre megy 150, 200 métert, és kelet-nyugatra 50, 100-at. Ezzel az összes lehetőséget végignéztük, így összesen $8 + 4 + 4 = 16$ helyre érkezhetett.

B11. Adott négy kör, melyek mind 12 egység sugarúak, a középpontjaik egy négyzetet alkotnak, valamint mind áthaladnak az X ponton. A szomszédos középpontú körök X-en kívül is metszik egymást, ez a négy metszéspont A, B, C és D. Mennyi az $ABCD$ négyszög területe?

Megoldás: Mivel az X pontban metszik egymást a körök, és egyenlő sugárral rendelkeznek, emiatt ez a pont csak a négyzet átlóinak metszéspontjában lehet. Négyzet esetében az átlók derékszöget zárnak be egymással. Az A, B, C és D pontokat megkaphatjuk, úgy hogy az X pontot tükrözzük a négyzet egy-egy oldalára. Ez amiatt egy jó eljárás, mivel könnyű meggondolni, hogy két kör metszéspontjai egymás tükörképei a körök középpontjai által meghatározott egyenesre. Mivel X-ben az átlók merőlegesen találkoznak, emiatt a tükrőzéssel megkapott pontokra is igaz lesz, hogy a két kör középpontjaival összekötő egyenesei merőlegesek egymásra. A tükrőzésből az is adódik, hogy például az A, X és a hozzájuk tartozó két körközéppont négyzetet alkotnak, vagyis AB egyenes át megy a közös körük középpontján. Az eddigiekből látható, hogy A, B, C és D pontok négyzetet alkotnak, és az oldalak átmérők, így egy oldalának a hossza a sugár kétszeresével egyezik meg, vagyis $24 \cdot 24 = 576$ egység a négyszög területe.



B12. Ramszesz fáraó építtetett alattvalóival egy piramist. A piramist 5 méter oldalhosszúságú kocka alakú kövekből építették. A kockák minden szinten négyzet alakban lettek lerakva úgy, hogy minden szinten eggyel több kőből állt a négyzet oldala, mint a felette lévő szinten. A piramis az ábrán látható módon nézett ki oldalról, mind a négy irányból. Hány olyan kő van, ami legalább részben látható felülnézetből, ha a piramis magassága 120 méter?



Megoldás: Két különböző gondolatmenetet is mutatunk, a második kicsit trükkösebb.

1. gondolatmenet: A piramis 24 szintből áll, mivel $120/5 = 24$. Minden egyes szinten csak a szélső kövek lesznek láthatóak, vagyis az első szinten 1, a második szinten 4, harmadik szinten 8 darab és így tovább, az elsőn kívül mindig néggyel nő (ahol a szinteket a piramis tetejétől nézzük). Ez azért igaz, mert mindig eggyel hosszabb oldalú négyzetnél számoljuk meg a kerületen lévő pontokat, azaz minden oldal eggyel lett hosszabb, így összesen néggyel. Tehát a megoldás $1+4+8+12+\ldots+23\cdot 4$. Az egyet vegyük külön, ezek után ezt pedig már nem nehéz kiszámolni, lehet például úgy csinálni, hogy az elsőt az utolsóval, másodikat az utolsó előttivel adjuk össze, és így tovább, mivel ekkor minden tagban éppen $24\cdot 4$-t kapunk. Lesz 11 ilyen tag, és középen még kimarad egy $12\cdot 4$, azaz $1+4+8+12+\ldots+23\cdot 4 = 1+11\cdot 24\cdot 4+12\cdot 4 = 1105$ kő látható felülnézetből.

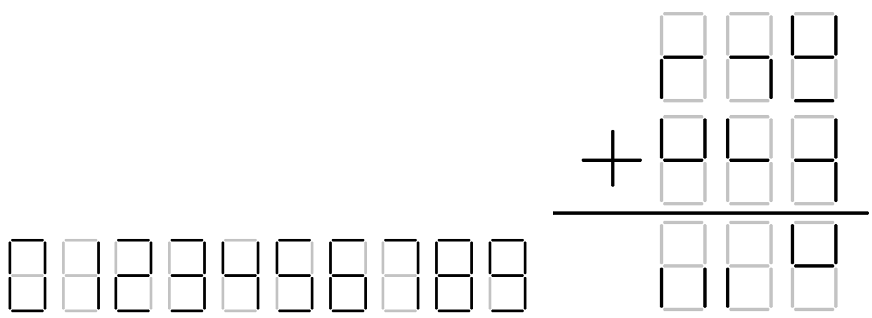
2. gondolatmenet: Az előzővel hasonlóan indulva, 24 szint van, és mindegyiken a szélsők látszanak ki. Észrevehetjük, hogy ha az adott szint számát megszorozzuk önmagával, ami a szinten lévő összes kő száma, és kivonjuk belőle a kettővel kisebb szám önmagával vett szorzatát, ami a belső, nem látható kövek száma, akkor megkapjuk az azon a szinten lévő látható kövek számát. Tehát a megoldás

$$1\cdot 1+2\cdot 2+(3\cdot 3-1\cdot 1)+(4\cdot 4-2\cdot 2)+\ldots+(24\cdot 24-22\cdot 22).$$

Figyeljük meg, hogy az $1\cdot 1$-t összeadjuk, majd kivonjuk. A $2\cdot 2$-t összeadjuk, majd kivonjuk. És így tovább, majdnem minden kiesik, azt kapjuk, hogy az összeg $23\cdot 23+24\cdot 24 = 1105$.

B13. Áron az iskolai táblán digitális számjegyeket használva összeadott két háromjegyű számot, eredményként egy újabb háromjegyű számot kapott. Az órák után a takarítónő letörölte a számolás egy részét a tábláról. Emiatt a következő reggel Áron már csak az ábrán látható részletét látta a számolásnak. Mennyi volt Áron két összeadott száma közül a kisebbik?

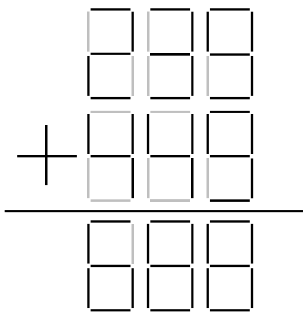
Az alábbiakban látható, hogy a lehetséges digitális számjegyek pontosan hogyan néznek ki 0-tól 9-ig.



Megoldás: Elsőnek nézzük meg az egyes helyiértéken álló számokat. A legfelső számban ez 8 vagy 9 lehet, a középsőben 3, 4, 8 vagy 9 lehet és a legalsóban pedig 4, 8 vagy 9. Végignézve az összes lehetőséget látható, hogy csak az lehetséges, hogy 9-re végződik a két felső szám, és 8-as az alsó. Vegyük végig, hogy a további helyeken mi lehet:

- első szám első jegy: 2, 6, 8
- első szám második jegy: 3, 4, 5, 6, 8, 9
- második szám első jegy: 4, 8, 9
- második szám második jegy: 4, 5, 6, 8, 9
- harmadik szám első jegy: 6, 8 (a 0 nem lehet, mert azzal nem kezdődhet szám).
- harmadik szám második jegy: 0, 2, 6, 8.

Mivel az összeg háromjegyű, így az első jegye az első számnak 2, másodiknak 4, mivel bármilyen más esetben már négyjegyű lenne. A tízes helyiértékről legfeljebb 1 maradék jöhet két szám összeadásánál, így a harmadik szám első jegye csak 6 lehet.
Emiatt a tízes helyiértéken nincs tízesátlépés, de az egyes helyiértéken van. Ezen információk alapján a tízes helyiértéken csak a $3+4(+1)=8$ összeadás lehetséges. Tehát a teljes összeadás a következő: $239+449=688$, így a válasz 239.



B14. Dionüszosz szereti a bodzaszörpöt magában és hígítva is. Naponta azonban csak 1 decilitert képes meginni belőle (úgy, hogy ez az 1 dl szörp még tetszőleges mennyiségű vízzel hígítva lehet). A kedvenc 6 deciliteres üvegét teletöltötte tömény szörppel. Minden nap megiszik az üvegből annyi folyadékot, amennyit csak tud, majd felönti vízzel, hogy tele legyen, ezután alaposan elkeveri. Miután kiürült az üveg, már nem tölti újra. Összesen hány milliliter vizet ivott meg az üvegből Dionüszosz?

Megoldás: Dionüszosz hat nap alatt issza ki az üveget, mivel minden egyes nap egy-egy deciliter szörpöt fogyaszt el. A napok során elfogyasztott víz és szörp együttes mennyiségét fogjuk számolni, és kivonjuk belőle az összesen elfogyasztott szörp mennyiségét. Tudjuk, hogy az egyes napokon az akkor meglévő tömény szörp hányadrészét itta meg Dionüszosz: első nap az $\frac{1}{6}$-át, második nap az $\frac{1}{5}$-ét, harmadik napon az $\frac{1}{4}$-ét és így tovább. Ez megegyezik azzal, hogy a kevert ital mekkora részét itta meg adott nap Dionüszosz. Vagyis $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=2{,}45$ üveg hígított szörpöt ivott meg, amiből egy üveg tömény szörp, vagyis 1,45 üvegnyi vizet ivott. Így $1{,}45\cdot 600=870$ milliliter vizet ivott meg.

B15. Egy bolha csücsül a számegyenes 0 pontjában. Az első lépésben a bolha egyet ugrik jobbra vagy balra, a második lépésben kettőt ugrik jobbra vagy balra, és így tovább, mindig ahányadik lépés jön, annyit ugrik jobbra vagy balra. Hányféleképpen juthat el 9 ugrással a 27-es számra?

Megoldás:

Gondoljuk meg, hogy ha a bolha csak jobbra ugrál, akkor az $1+2+\ldots+9=45$ számra érkezik. Ha ehelyett néhány ugrást megfordítunk, amiknek az összege valamilyen hosszú, akkor a végső pont kétszer ennyivel csökken. Például ha az 1 és 5 ugrásokat balra teszi meg a jobb helyett, akkor 45 helyett a $45-2\cdot(1+5)=33$ mezőre érkezik. Ez azért van, mert ahelyett, hogy egy ugrást jobbra tenne meg, helyette balra teszi meg, így kétszer kell levonni. Ezek alapján könnyen látható, hogy a balra ugrások összegének 9-nek kell lennie, hogy éppen 27-re érkezzenek. Tehát azt kell megszámolnunk, hogy hányféleképpen lehet a 9-et különböző pozitív egészek összegeként felírni. (Erre egy egyszerűbb gondolatmenet, ha valaki ért az ismeretlenekkel való számoláshoz: ha a balra ugrások hosszainak összege l, akkor $27=45-2l$. Ebből $l=\frac{45-27}{2}=9$.)

Ha egyszer ugrik csak balra, akkor csak a $9=9$ eset van. Ha kétszer ugrik balra, akkor $9=8+1=7+2=6+3=5+4$, tehát négyféle lehetőség van. Ha háromszor ugrik balra, akkor a lehetőségek $9=6+2+1=5+3+1=4+3+2$, tehát három eset van. Négyszer már nem ugorhat balra, hiszen a lehető legkisebb a $4+3+2+1=10$ lenne, de már ez is nagyobb, mint 9. Így összesen $1+4+3=8$ lehetőség van.

B16. Adott az ABC háromszög, melynek az A-ból induló belső szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Legyen F az AD szakasz felezőpontja. Tudjuk, hogy a CAD szög $42°$, továbbá hogy a BAD szög belső szögfelezője és az F-en keresztül AB-vel húzott párhuzamos a BC egyenesen metszik egymást. Hány fokos az ABC szög?

Megoldás: Jelöljük a BAD szög szögfelezője, az F-ből AB-vel húzott párhuzamos és a BC egyenes metszéspontját G-vel. Mivel AD felezi a BAC szöget, így a BAD szög $42°$-os.

Tudjuk, hogy FG párhuzamos AB-vel, és F felezőpont, így FG középvonal az ABD háromszögben, azaz G felezőpont. Tehát az AG vonal az ABD háromszögben egyszerre szögfelező és súlyvonal, amiből könnyen meggondolható, hogy ABD egyenlőszárú. Ebben a háromszögben tudjuk a szárszöget, így az alapon fekvő szögek $\frac{180°-42°}{2} = 69°$ méretűek, tehát 69 a válasz.

Egy második, kicsit hosszabb, és több jelölést igénylő, de hiánytalanabb megoldást is leírunk:

Az előzőekhez hasonlóan $BAD\sphericalangle = 42°$, így $BAG\sphericalangle = GAD\sphericalangle = 21°$. Tudjuk, hogy GF párhuzamos AB-vel, így BAG és AGF váltószögek, azaz $AGF = 21°$. Így AGF háromszög egyenlőszárú, azaz $AF = FG$. De mivel F felezi AD-t, így $AF = FD$, azaz $GF = FD$. Szóval GFD háromszög is egyenlőszárú.

$AFG\sphericalangle = 180° - GAF\sphericalangle - FGA\sphericalangle = 180° - 21° - 21° = 138°$, mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°.

Mivel GF párhuzamos AB-vel, így $ABC\sphericalangle$ és $FGD\sphericalangle$ párhuzamos állású szögek, azaz egyenlő nagyságúak. Jelöljük ezeket a szögeket β-val. Mivel FGD háromszög is egyenlő szárú, így azt is tudjuk, hogy $GDF\sphericalangle = \beta$. Továbbá $GFD\sphericalangle = 180° - GFA\sphericalangle = 180° - 138° = 42°$. Így

$$ABC\sphericalangle = \beta = FGD\sphericalangle = FDG\sphericalangle = \frac{180° - GFD\sphericalangle}{2} = \frac{180° - 42°}{2} = 69°.$$

Tehát $ABC\sphericalangle = 69°$.