kategória

C

9-10. osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő: 2023. február 10-12.

MATEMATIKA

KIFEJTŐS MEGOLDÓKULCS

C1. **a)** Hat félisten részt vett egy színházfesztiválon. Minden este több előadást is játszottak, és mindenki beült valamelyik előadásra. Esténként minden előadás egyszerre zajlott. Lehetséges-e, hogy bármely két félisten pontosan egyszer nézett meg előadást közösen, ha minden este páros sok előadás volt, amit legalább egy félisten látott?
b) Lehetséges-e hét félisten esetén?
c) Lehetséges-e nyolc félisten esetén?
Kocsis Anett feladata

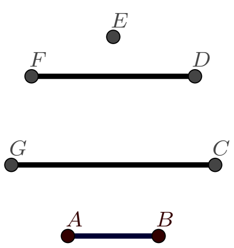
Megoldás: a) Jelölje a hat félistent A, B, C, D, E és F. Az első este két előadás volt: A, B, C és D volt az egyiken, E és F pedig a másikon. Ezután minden este négy előadás volt: A, B, C és D közül ketten mindig egyedül voltak, ketten pedig párba álltak E-vel és F-fel. Például így:

2. $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C, E\}$, $\{D, F\}$
3. $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C, F\}$, $\{D, E\}$
4. $\{C\}$, $\{D\}$, $\{A, E\}$, $\{B, F\}$
5. $\{C\}$, $\{D\}$, $\{A, F\}$, $\{B, E\}$

b) Jelölje a hét félistent A, B, C, D, E, F és G. Minden este párokban mennek az előadásokra, leszámítva valakit, aki egyedül. A következő beosztás például jó:

1. $\{A, B\}$, $\{C, G\}$, $\{D, F\}$, $\{E\}$
2. $\{B, C\}$, $\{A, D\}$, $\{G, E\}$, $\{F\}$
3. $\{C, D\}$, $\{B, E\}$, $\{A, F\}$, $\{G\}$
4. $\{D, E\}$, $\{C, F\}$, $\{B, G\}$, $\{A\}$
5. $\{E, F\}$, $\{D, G\}$, $\{C, A\}$, $\{B\}$
6. $\{F, G\}$, $\{E, A\}$, $\{D, B\}$, $\{C\}$
7. $\{G, A\}$, $\{F, B\}$, $\{E, C\}$, $\{D\}$

Az alábbi ábra mutatja, mi a logika ebben a konstrukcióban. Vonallal jelöltük, hogy első este mely párok mentek egy előadásra. Ha ezt a három vonalat egyszerre elkezdjük forgatni balra, megkapjuk a második este beosztását, és így tovább. Ellenőrizhető, hogy bármely félistenpár a körbeforgatás során pontosan egyszer lesz párban.



c) Legyen a nyolc félisten A, B, C, D, E, F, G és H. A beosztás legyen ugyanaz, mint a **b)** feladatban, annyi változtatással, hogy H mindig az egyedül levő félistenhez társul.

C2. Kartal kitölt egy 5×5-ös táblázatot pozitív egész számokkal. Ezek után Benedek minden sor és minden oszlop végére odaírja az ott szereplő számok összegét. Végül Andris leírja, hogy a Benedek által írt számok közül hány darab páros. Mi lehet az Andris által leírt szám?
Imolay András feladata

Megoldás: Ha összeadjuk a sorok és az oszlopok végén lévő számokat, akkor a táblázatban levő számok összegének kétszeresét fogjuk kapni, mivel a táblázatban minden szám egy oszlophoz és egy sorhoz tartozik. Emiatt egy páros számot kapunk, ami azt jelenti, hogy biztosan páros sok páros számot írt le Benedek. Ezek alapján 0, 2, 4, 6, 8 vagy 10 az Andris által leírt szám. Ez a hat eset tényleg meg is valósítható. Például ha tekintjük azt a hat táblázatot, amikor a táblázatban az egyik átlón kívül minden szám páros és ebben az átlóban 5, 4, 3, 2, 1 vagy 0 páratlan szám van, akkor Andris 0, 2, 4, 6, 8 vagy 10 páros számot lát ilyen sorrendben. Az Andris által leírt szám tehát 0, 2, 4, 6, 8 vagy 10 lehet.

Példa a lehetséges esetekre:

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Andris száma 0

2	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Andris száma 2

2	1	1	1	1
1	2	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Andris száma 4

2	1	1	1	1
1	2	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Andris száma 6

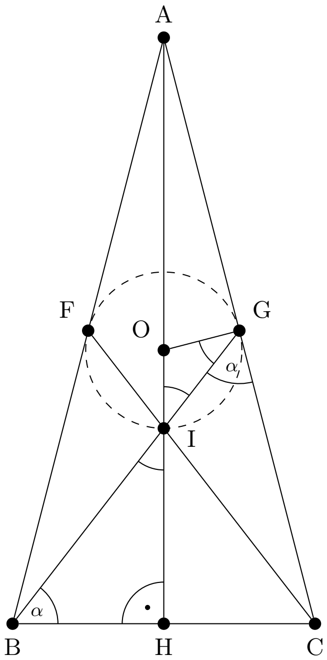
2	1	1	1	1
1	2	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	1	2	1
1	1	1	1	1

Andris száma 8

2	1	1	1	1
1	2	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	1	2	1
1	1	1	1	2

Andris száma 10

C3. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a BC alap 1 cm, az AB és az AC szárak 2 cm hosszúak. Legyen az AB szakasz felezőpontja F, az AC szakasz felezőpontja pedig G. Legyen k az a kör, ami érinti az AB oldalt az F, valamint az AC oldalt a G pontban. Igazoljátok, hogy a CF és BG egyenesek metszéspontja a k körre esik.
Imolay András feladata



Megoldás: Legyen a BC oldal felezőpontja H, a BG és CF szakaszok metszéspontja pedig I. Jelölje O az FGI háromszög köréírt körének középpontját. Legyen továbbá $\alpha = CBG\sphericalangle$ szög nagysága. Elég belátnunk, hogy az $OGC\sphericalangle = 90°$, mert akkor a FGI kör érinti a szárakat, vagyis I rajta van a k körön.
Mivel F és G a szárak felezőpontjai, ezért $BF = CG = BC = 1$ cm. Vagyis a BCG háromszög egyenlő szárú, amiből $IGC\sphericalangle = \alpha$.
Mivel az ábra szimmetrikus BC felezőmerőlegesére, ezért az IH és BC egyenesek merőlegesek egymásra. Ebből kapjuk, hogy $BIH\sphericalangle = 90° - \alpha$, amiből $OIG\sphericalangle = 90° - \alpha$. Viszont mivel O az FGI kör középpontja, ezért $OGI\sphericalangle = OIG\sphericalangle = 90° - \alpha$. Ebből következik, hogy $OGC\sphericalangle = OGI\sphericalangle + IGC\sphericalangle = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Ezzel beláttuk az állítást.

C4. Amikor Andris belépett a terembe, a táblán a 3 és a 24 számok szerepeltek. Egy lépésben, ha a táblán szerepelnek a (nem feltétlenül különböző) k és n számok, akkor Andris a $kn + k + n$ számot is felírhatja.
a) Elérheti-e Andris, hogy néhány lépés után a 9999999 szerepeljen a táblán?
b) Mi a helyzet, ha a 99999999-et akarja elérni?
c) Na és ha a 48999999-et?
Imolay András feladata

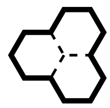
Megoldás: Vegyük észre, hogy a táblán csak olyan számok szerepelhetnek, amelyek eggyel kisebbek, mint egy négyzetszám. A 3 és a 24 is ilyen, így azt kell belátnunk, hogy ha egy lépést megelőzően minden szám, amely a táblán szerepel, egy négyzetszám megelőzője, akkor az ebben a lépésben Andris által felírt szám is ilyen lesz: valóban, ha k, n a táblán szerepelnek, Andris pedig a $kn+k+n = (k+1)(n+1)-1$ számot írja fel, az is ilyen lesz, mivel $k+1$ és $n+1$ négyzetszámok, így a szorzatuk is.

a) A fentiek alapján nem érheti el, hiszen $9999999 + 1 = 10000000$ nem négyzetszám.

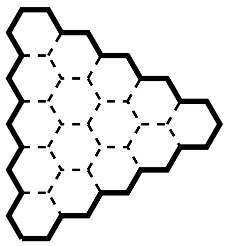
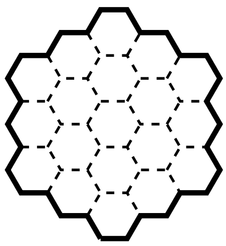
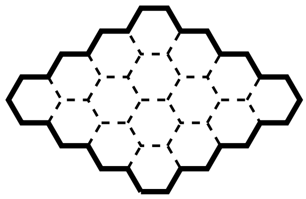
b) Elérheti a következő lépéssorozattal: a 3-ból és a 24-ből megkapja a $3 \cdot 24 + 3 + 24 = 99$-et, majd a 99-ből eléri a $99 \cdot 99 + 99 + 99 = 9999$-et, végül pedig ebből a $9999 \cdot 9999 + 9999 + 9999 = 99999999$-et.

c) Vegyük észre, hogy az is teljesül a táblán szereplő számokra, hogy a rákövetkezőjüknek csak a 2 és az 5 a prímosztói. Ezt hasonlóan bizonyítjuk. A két kezdeti számra (3 és 24) teljesül az állítás, illetve ha egy lépés előtt minden táblán szereplő számra teljesül, akkor az ebben a lépésben Andris által felírt számra is teljesülni fog: valóban, ha k, n a táblán szerepelnek, Andris pedig a $kn + k + n = (k + 1)(n + 1) - 1$ számot írja fel, az is ilyen lesz, mivel $k + 1$ és $n + 1$ prímosztói csak a 2 és az 5, így a szorzatuké is. Ezek alapján Andris nem érheti el a $48999999 = 49000000 - 1$ számot, hiszen a 49000000 osztható 7-tel is.

C5. Jóska a lenti ábrákon látható alakzatokat szeretné teljesen feketére változtatni. Egy lépésben a jobb oldalon látható három darab kis hatszögből álló alakzatot lehelyezheti bárhova, és ekkor az ott lévő mezők színe megváltozik (fehérről feketére vagy feketéről fehérre). Mely ábrák esetében tudja Jóska megvalósítani a célját néhány ilyen lépés segítségével?



A használható darabkát forgathatjuk is, de minden esetben pontosan három teljes hatszöget kell fednie, amikor Jóska lerakja.

a)  b)  c) 

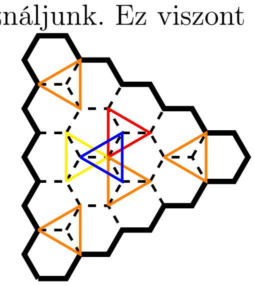
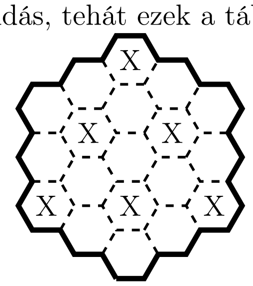
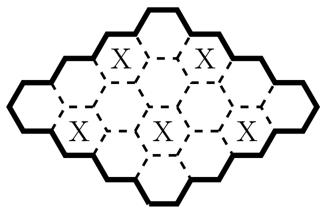
Osztényi József feladata

Megoldás: Jóska az **a)** ábrát feketére tudja változtatni, de a **b)** és a **c)** ábrát nem.

a) Egy átszínezést egy kis háromszöggel fogok jelölni. Mivel minden hatszöget 1-szer vagy 3-szor színezünk át (egy vagy 3 vonal megy át rajta), mindegyik fekete lesz a végére. A színeket csak a láthatóság kedvéért használtam, a sorrend mindegy.

b) és **c)** Mindkét alakzatba X-eket tettem, mégpedig úgy, hogy ha bármilyen módon ráteszek egy háromszöget, pontosan egy X és két X nélküli mező lesz benne. Innentől az X-es mezőkkel nem fogunk foglalkozni. Kezdetben üresek a táblák. Amikor leteszünk egy háromszöget, mindegyik mezőre, amit lefed, és nincs rajta X, leteszünk egy gyufaszálat. Így minden letételkor a táblán lévő gyufaszálak száma kettővel nő, azaz a táblán lévő gyufák száma mindig páros lesz.

Tegyük fel, hogy sikerült átfesteni a táblát feketére. Ekkor minden nem X-es mezőn páratlan sok gyufaszál kell hogy legyen, hiszen pontosan akkor festünk át egy mezőt, ha ráteszünk egy gyufaszálat. Mivel mind a két esetben páratlan sok X-mentes mező van, ezért összesen páratlan számú gyufát kellett, hogy használjunk. Ez viszont ellentmondás, tehát ezek a táblák nem átszínezhetőek.

a)  b)  c) 

C6. **Játék:** Adott egy 3×3-as táblázat. Egy lépésben a soron következő játékos beír egy üres mezőbe egy 1-es, 2-es vagy 3-as számjegyet úgy, hogy ne keletkezzen olyan sor vagy oszlop, amiben van két azonos szám. A kezdő játékos akkor nyer, ha mind a 9 mezőbe kerül szám, míg a második akkor nyer, ha valakinek a köre előtt még van üres mező, de már nem tud szabályosan lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Nagy Kartal feladata

Megoldás: Nevezzünk egy *bástyaelrendezésnek* három olyan mezőt, melyek úgy helyezkednek el, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy van. Ha a játék során létrejön egy bástyaelrendezés, aminek három mezőjében a három különböző szám áll, akkor nyert a kezdő játékos, mivel könnyen látható, hogy ekkor minden mezőbe már csak egyféle szám kerülhet, amiket beírva végül teljesen kitöltődik a táblázat. Nevezzünk egy ilyen bástyaelrendezést *vegyesnek*.

1	3	2
2	1	**3**
3	**2**	1

A kezdőnek van nyerő stratégiája, mivel mindig el fog tudni érni egy ilyen átlót. Teljesen mindegy, hogy mi az első lépése, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy középre rak egy 1-est. Ha a második valamelyik sarokba ír egy 2-est vagy 3-ast, akkor a kezdő egyből el tudja érni, hogy legyen egy vegyes bástyaelrendezés, így ekkor nyer.

Ha a második valamelyik sarokba egy 1-est ír, akkor a kezdő írjon egy 1-est úgy, hogy kialakuljon egy csupa 1-esekből álló átló. Ezek után akárhova ír egy számot a második, látható, hogy a kezdő ki tudja egészíteni úgy, hogy legyen egy vegyes bástyaelrendezés, így ekkor is nyer.

	1	
3		1
1		**2**

Ha a második valamelyik élen a középső mezőbe ír, akkor a kezdő kiegészti úgy, hogy egy sor vagy oszlop teljesen ki legyen töltve. Ekkor megint akárhova ír egy számot a második, ki lehet egészíteni, hogy legyen egy vegyes bástyaelrendezés.

1		**3**
2		
3	**1**	

Tehát tényleg minden esetben a kezdő nyer.