kategória

D

9-12.
osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
KIFEJTŐS
MEGOLDÓKULCS

D1. Adjátok meg az összes olyan 1-nél nagyobb egész számot, aminek pontosan eggyel kevesebb osztója van, mint a tőle különböző osztóinak összesen!
Például a 6 a négy darab osztójával egy ilyen szám, mivel a 2-nek és 3-nak két darab, míg az 1-nek egy darab osztója van.
Zólomy Kristóf feladata

Megoldás: Legyen az általunk vizsgált szám a és az osztóinak számát jelöljük $d(a)$-val. Vizsgáljuk meg az a osztóit. Tegyük 3 csoportba őket:

1. csoport: 1
2. csoport: a
3. csoport: a szám összes többi osztója

Az első csoportban lévő számnak 1 osztója van. Az utolsó csoportban lévő számoknak biztosan van két osztója, mert ott van saját maguk és az 1.

Ebből azt kapjuk, hogy az a szám nála kisebb osztónak összege legalább $1+2\cdot(d(a)-2) = 2\cdot d(a)-3$, vagyis ha $d(a) > 4$, akkor nem állhat fenn sosem az egyenlőség $d(a) + 1$-gyel. Tehát elég a $d(a) \leq 4$ eseteket megvizsgálni.

Ha $d(a) = 4$, akkor a-nak kétféle prímtényezős felbontása lehet, $a = p \cdot q$ vagy $a = p^3$, ahol p és q különböző prímszám. Itt az első eset jó, mert a szám önmagánál kisebb osztói osztóinak száma 5, míg a második nem jó, mert ott ez a szám 6.

Ha $d(a) = 3$, akkor a-nak egyféle prímtényezős felbontása lehet, ami $a = p^2$, amire nem teljesül, mert neki 3 osztója van és a nála kisebb osztói osztóinak száma összesen is 3.

Ha $d(a) = 2$, akkor egyféle prímtényezős felbontása lehet, ami $a = p$, amire nem teljesül a feltétel.

Ha $d(a) = 1$, akkor az a csak 1 lehet, amire szintén nem teljesül a feltétel.

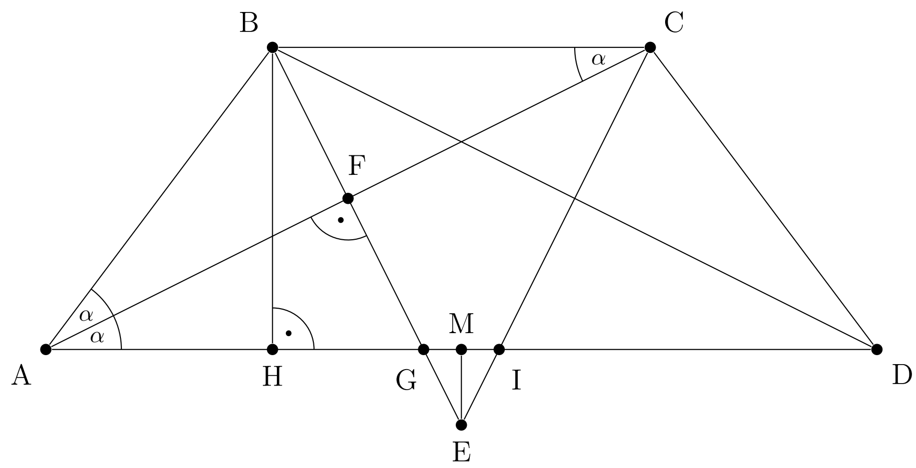
Tehát azt kaptuk, hogy a $p \cdot q$ prímtényezős felbontású számok a megfelelőek.

D2. Legyen $ABCD$ egy szimmetrikus trapéz, aminek az AD alapja 11 cm hosszú, míg a másik három oldala 5 cm hosszú. Legyen a C-ből a BD átlóra állított, és a B-ből az AC átlóra állított merőleges egyenesek metszéspontja E. Határozzátok meg az E pont távolságát az AD egyenestől!
Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Jelöljük BE metszéspontját AC-vel és AD-vel ilyen sorrendben F-fel és G-vel, a B-ből AD-re állított merőleges talppontját H-val, míg AD felezőpontját M-mel.

Ahogy $ABCD$ szimmetrikus trapéz, úgy E rajta van az AD szakasz felezőmerőlegesén, vagyis azon az egyenesen, ami átmegy M-en és merőleges AD-re. Másrészt tudjuk, hogy ABC egyenlő szárú, vagyis F felezi AC-t. Emiatt viszont AFG és CFB háromszögek egybevágóak, ahogy az egyik oldaluk (AF és CF) azonos hosszú, és a szögeik egyenlők, mert az A-beli és C-beli szögek váltószögek és az F-beli szögek csúcsszögek. Emiatt $AG = BC = 5$. Másrészt mivel $ABCD$ szimmetrikus, így $AH = \frac{11-5}{2} = 3$. Emiatt, valamint $AM = \frac{AD}{2} = \frac{11}{2}$ miatt $MG = MA - AG = \frac{11}{2} - 5 = \frac{1}{2}$ és $GH = GA - AH = 5 - 3 = 2$.

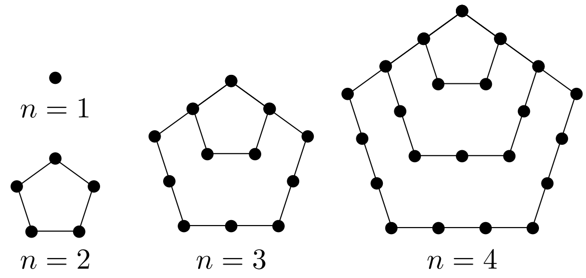
Az ABH háromszögre írt Pitagorasz-tétel miatt $HB = 4$. Ekkor viszont a derékszögek és a csúcsszögek miatt HBG és EMG háromszögek hasonlóak. A hasonlóság aránya $\frac{HG}{GM} = \frac{2}{0.5} = 4$. Így a $\frac{BH}{EM}$ arány is 4, vagyis $BH = 4$ miatt $EM = 1$. Mivel EM merőleges AD-re, így EM hossza épp a keresett távolság, vagyis a válasz 1 egység.



Alternatív befejezés: a GI szakasz hosszát tudjuk, hogy $11-2\cdot 5 = 1$ hosszú. BC és GI párhuzamosak, így EGI és EBC háromszögek hasonlóak. A hasonlósági arány $\frac{BC}{GI} = 5$, tehát a magasságaik aránya is 5. Viszont tudjuk, hogy a magasságaik különbsége éppen a trapéz magassága, tehát 4, vagyis a nagyobbik magasság 5, míg a kérdéses kisebbik 1 hosszú.

D3. Bizonyítsátok be, hogy végtelen sok ötszögszám létezik, ami előáll két másik (nem feltétlenül különböző) ötszögszám összegeként!

Az első ötszögszám az 1. *Az* n*-edik ötszögszám* ($n \geq 2$*-re) a közös csúcsból, azonos irányba rajzolt,* $1 \leq k \leq n-1$ cm *oldalhosszúságú összes szabályos ötszög csúcsai és oldal-k-adoló pontjai közül a különböző pontok száma. Az első négy ötszögszám az* 1, 5, 12 *és* 22, *lásd ábra.*



Osztényi József feladata

Megoldás: Legyen p_n az n-edik ötszögszám!

Ekkor $p_{n+1} - p_n = 3n+1$, hiszen a különbség az újonnan berajzolt $n+1$ cm-es ötszög új csúcsai (4 darab) és ezen ötszög 3 oldalán az $(n+1)$-edelő pontok (3-szor $n-1$ darab), azaz összesen $4+3\cdot(n-1) = 3n+1$ darab.

Ebből következik, hogy minden 1-nél nagyobb, 3-mal egy maradékot adó pozitív egész létrejön két szomszédos ötszögszám különbségeként.

Ugyanakkor az ötszögszámok 3-as maradéka mindig 1-el nő. Az első ötszögszám hármas maradéka 1, tehát minden $k = 3m+1$ alakú ötszögszám hármas maradéka is 1. Mivel minden 3-mal 1 maradékot adó pozitív egész létrejön két szomszédos ötszögszám különbségeként, p_{3m+1} is, tehát bármilyen nagy ötszögszámhoz találunk két szomszédos ötszögszámot, amiknek ő a különbsége, azaz találtunk végtelem sok ötszögszámot, ami előáll két másik összegeként.

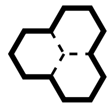
Több képlettel és kevesebb szöveggel ugyanez az ötlet:

$p_{n+1} - p_n = 3n+1$, ahogy az előbb. Ekkor viszont $p_{n+1} = 1 + 4 + ... + 3n - 2 + 3n + 1 = \frac{n(3n+2)}{2}$, azaz $p_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.

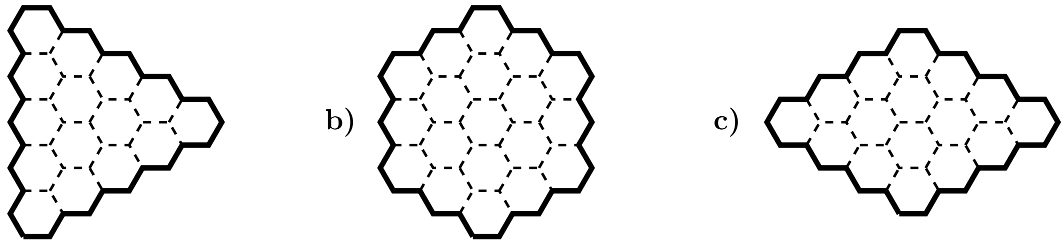
Ebből következik, hogy $k = 3m+1$-re $p_k = p_{3m+1} = \frac{(3m+1)(9m+2)}{2} = \frac{27m^2+9m+2}{2}$. Legyen $n = (p_k - 1)/3 = \frac{27m^2+9m}{6} = \frac{3m(3m+1)}{2}$, ami egy egész szám, hiszen vagy m vagy $3m+1$ páros. Tehát $p_n + p_k = p_{n+1}$, mivel $p_{n+1} - p_n = 3n+1 = p_k$. Így minden m-re

$$p_{\frac{3m(3m+1)}{2}} + p_{3m+1} = p_{\frac{3m(3m+1)}{2}+1}.$$

D4. Jóska a lenti ábrákon látható alakzatokat szeretné teljesen feketére változtatni. Egy lépésben a jobb oldalon látható három darab kis hatszögből álló alakzatot lehelyezheti bárhova, és ekkor az ott lévő mezők színe megváltozik (fehérről feketére vagy feketéről fehérre). Mely ábrák esetében tudja Jóska megvalósítani a célját néhány ilyen lépés segítségével?



A használható darabkát forgathatjuk is, de minden esetben pontosan három teljes hatszöget kell fednie, amikor Jóska lerakja.



a) b) c)

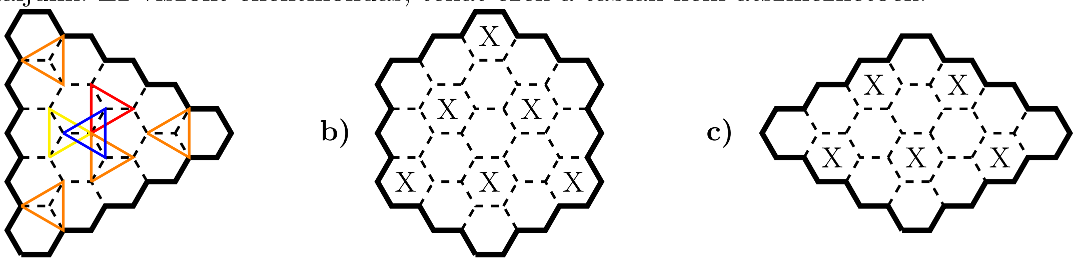
Osztényi József feladata

Megoldás: Jóska az **a)** ábrát feketére tudja változtatni, de a **b)** és a **c)** ábrát nem.

a) Egy átszínezést egy kis háromszöggel fogok jelölni. Mivel minden hatszöget 1-szer vagy 3-szor színezünk át (egy vagy 3 vonal megy át rajta), mindegyik fekete lesz a végére. A színeket csak a láthatóság kedvéért használtam, a sorrend mindegy.

b) és **c)** Mindkét alakzatba X-eket tettem, mégpedig úgy, hogy ha bármilyen módon ráteszek egy háromszöget, pontosan egy X és két X nélküli mező lesz benne. Innentől az X-es mezőkkel nem fogunk foglalkozni. Kezdetben üresek a táblák. Amikor leteszünk egy háromszöget, mindegyik mezőre, amit lefed, és nincs rajta X, leteszünk egy gyufaszálat. Így minden letételkor a táblán lévő gyufaszálak száma kettővel nő, azaz a táblán lévő gyufák száma mindig páros lesz.

Tegyük fel, hogy sikerült átfesteni a táblát feketére. Ekkor minden nem X-es mezőn páratlan sok gyufaszál kell hogy legyen, hiszen pontosan akkor festünk át egy mezőt, ha ráteszünk egy gyufaszálat. Mivel mind a két esetben páratlan sok X-mentes mező van, ezért összesen páratlan számú gyufát kellett, hogy használjunk. Ez viszont ellentmondás, tehát ezek a táblák nem átszínezhetőek.



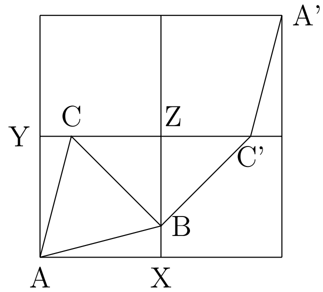
a) b) c)

D5. Hanga, a hangya, egy 1 cm oldalhosszúságú négyzetrács egyik rácspontjában áll, és az egyik rácsvonal irányába néz. Fordul 15°-ot balra, majd elindul egyenesen amerre néz. Ezután akárhányszor metsz egy rácsvonalat (vagy rácspontot), fordul 30°-ot balra, majd egyenesen folytatja az útját. Milyen messze lesz a kiindulási ponttól a tizedik 30°-os forduló pillanatában?
Páhán Anita feladata

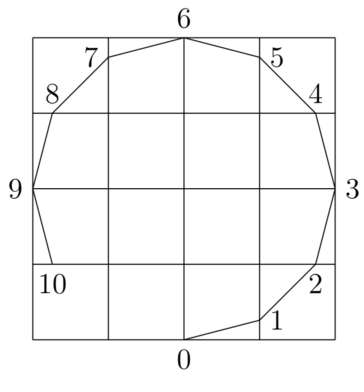
Megoldás: Induljunk ki egy ABC háromszögből egy egységnégyzetben, ahol $XAB\sphericalangle = CAY\sphericalangle = 15°$, lásd ábra. Ekkor ACY és ABX háromszögek egybevágóak, így $AC = AB$, és mivel $CAB\sphericalangle = 90° - 15° - 15° = 60°$, ezért ABC egy szabályos háromszög. Továbbá szimmetria miatt $CBZ\sphericalangle = 45°$.

Hanga pont az AB szakaszon fog elindulni. Ha tükrözzük C-t az XZ egyenesre, megkapjuk C'-t. $ABC'\sphericalangle = 60° + 45° + 45° = 150°$, tehát a Hanga pont a BC' szakaszon fog tobábbhaladni.

Ha tükrözzük az AC szakaszt Z-re középpontosan, C-ből C', A-ból A' lesz. $A'C'B\sphericalangle = A'C'Z\sphericalangle + ZC'B\sphericalangle = ACZ\sphericalangle + ZC'B\sphericalangle = 75° + 45° = 150°$, tehát Hanga a $C'A'$ szakszon fog továbbhaladni. A következő 30° elfordulás után a kezdőhelyzethez képest pontosan 90 fokot fog elfordulni Hanga, és mivel épp egy rácspontban áll, egyszerűen csak 90 fokkal el kell forgatnuk az ábrát, hogy folytathassuk az utat.



Ahogy haladunk, minden szakasz ugyanolyan hosszú marad (hiszen egy szabályos háromszög oldalai tükrüzve), és mindig 150° a belső szög, így az összes pont egy körön helyezkedik el. Ennek a körnek a sugara 2cm, így a 0-s és a 10-es pont távolsága is 2 cm, mert fel tudjuk osztani a kört 6 darab szabályos háromszögre, amiknek az egyik csúcsa a kör középpontja, a többi csúcsa pedig szomszédos páros számok.



D6. **Játék:** Adott két kupac korong. Egy lépésben az éppen soron következő játékos az egyik kupachoz hozzáad néhány korongot (legalább egyet), és a másikból elvesz kétszer annyit. Az veszít, aki nem tud a szabályoknak megfelelően lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A két kupac méretének ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Imolay András feladata

Megoldás: Jelölje a és b a két kupacban lévő korongok számát: ezt az állást jelölje (a, b). Nevezzük nyerőállásoknak azokat az állásokat, amelyre lépve az adott játékos biztosan nyerni tud.

Állítás: Egy (a, b) állás pontosan akkor nyerőállás, ha $|a - b| \leq 1$.

Ennek a bizonyítása:

Azt kell meggondolni, hogy a fent állított nyerőállásokból csak nem nyerőbe tudunk lépni, és nem nyerőből csak nyerőbe. Ezzel tényleg kész lennénk, ekkor nem nyerő helyzetből kezdeni kell, és mindig nyerőre lépni, ezzel a végén világos, hogy nyerünk, míg ha a játék nyerőállásból indul, akkor át kell adni a kezdést.

1. eset: $|a - b| \leq 1$.

Egy lépésben valamilyen $m \geq 1$-re az egyik kupacból elveszünk $2m$ korongot, míg a másikhoz hozzáadunk m darabot. Ha az első kupacból veszünk el korongokat, akkor az (a, b) állásból az $(a - 2m, b + m)$ állásba jutunk, míg ha a másodikból, akkor az $(a + m, b - 2m)$ állásba jutunk. Vegyük észre, hogy az $a - b$ különbség értéke az első esetben $3m$-mel csökken, míg a második esetben $3m$-mel nő. Azaz minden lépésben a különbség legalább 3-mal változik. Ezért ha egy adott lépés előtt $a - b$ értéke -1, 0 vagy 1, akkor a lépés után már nem lehet -1, 0 vagy 1 az érték.

2. eset: $|a - b| \geq 2$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a > b$. Legyen $a - b = k$, ahol $k \geq 2$. Írjuk fel a k különbséget $k = 3m + r$ alakban, ahol m egész, és r pedig 0, 1 vagy -1. Ekkor $m > 0$, és ha $2m$-et elveszünk a-ból és m-et adunk b-hez, akkor látható, hogy a lépés után a két kupac méretének különbsége $|r|$, ami legfeljebb 1.

Ezzel bizonyítottuk az állításunk.