kategória

E

9-12.
osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
KIFEJTŐS
FELADATSOR

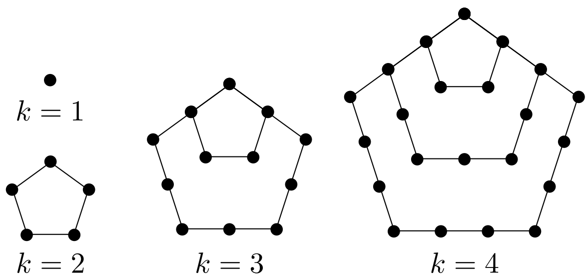
---

1. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a BC alap 1 cm, az AB és az AC szárak 2 cm hosszúak. Legyen az AB szakasz felezőpontja F, az AC szakasz felezőpontja pedig G. Legyen k az a kör, ami érinti az AB oldalt az F, valamint az AC oldalt a G pontban. Igazoljátok, hogy a CF és BG egyenesek metszéspontja a k körre esik.

2. Amikor Andris belépett a terembe, a táblán a 3 és a 24 számok szerepeltek. Egy lépésben, ha a táblán szerepelnek a (nem feltétlenül különböző) k és n számok, akkor Andris a $kn + k + n$ számot is felírhatja.
a) Elérheti-e Andris, hogy néhány lépés után a 9999999 szerepeljen a táblán?
b) Mi a helyzet, ha a 99999999-et akarja elérni?
c) Na és ha a 48999999-et?

3. a) Négy kereskedő szeretne Athénból Rómába elutazni szekérrel. Ugyanazon a napon, de különböző időpontokban indulnak Athénból és egy másik napon érkeznek meg Rómába, de éppen fordított sorrendben. Minden nap, amikor leszáll az est, minden kereskedő betér az úton következő fogadóba aludni. Amikor néhány kereskedő ugyanabban a fogadóban alszik egy éjszaka, akkor másnap pirkadatkor az érkezéshez képest fordított sorrendben indulnak tovább, mert a fogadók melletti szűk utcákban csak így tudnak parkolni. Az úton nem tudják megelőzni egymást, csak a fogadókban együtt eltöltött éjszakák során változik a sorrendjük. Végül minden kereskedő megérkezik Rómába úgy, hogy menet közben minden másik kereskedővel pontosan egyszer alszik ugyanabban a fogadóban. Lehetséges-e, hogy minden éjszaka páros számú különböző fogadóban alszanak?
b) Lehetséges-e akkor, ha a 4 helyett 8 kereskedő utazik és minden más feltétel változatlan?

4. Bizonyítsátok be, hogy minden $n \geq 3$ egészre végtelen sok n-szögszám létezik, ami előáll két másik (nem feltétlenül különböző) n-szögszám összegeként!
Az első n-szögszám az 1. A k-adik n-szögszám ($k \geq 2$-re) a közös csúcsból, azonos irányba rajzolt, $1 \leq \ell \leq k-1$ cm oldalhosszúságú összes szabályos n-szög csúcsai és oldal-ℓ-edelő pontjai közül a különböző pontok száma. Például az első négy ötszögszám az 1, 5, 12 és 22, lásd ábra.



5. A Görögország-Egyiptom kosárlabdameccs első negyedének végén 26-25 volt az állás. Áron minden görög kosár után felírta, hogy hány pontja van a görögöknek, míg Benedek minden egyiptomi kosár után felírta, hogy hány pontja van az egyiptomiaknak. A szünetben észrevették, hogy a felírt számaik közt nincs két egyforma. Hányféleképpen írhatta fel Benedek és Áron a számokat, ha az első negyedben 21 kosár volt, és mindegyik kosár 2 vagy 3 pontot ért?
Két felírási lehetőséget különbözőnek tekintünk, ha valamelyikük más számokat írt fel.

6. Játék: Adott négy, korongokból álló kupac, melyek 1-től 4-ig vannak számozva. Egy lépésben a soron következő játékos választ m és n egész számokat, melyekre $1 \leq m < n \leq 4$, majd az n sorszámú kupacból elvesz m korongot, és az $n-1, n-2, \ldots, n-m$ sorszámú kupacokba egyesével szétosztja az elvett korongokat. Az veszít, aki nem tud a szabályoknak megfelelően lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A négy kupac méretének ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVI. Dürer Verseny szervezői