kategória

E

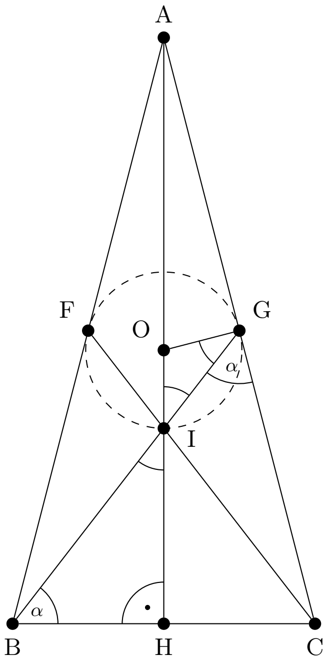
9-12.
osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
KIFEJTŐS
MEGOLDÓKULCS

E1. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a BC alap 1 cm, az AB és az AC szárak 2 cm hosszúak. Legyen az AB szakasz felezőpontja F, az AC szakasz felezőpontja pedig G. Legyen k az a kör, ami érinti az AB oldalt az F, valamint az AC oldalt a G pontban. Igazoljátok, hogy a CF és BG egyenesek metszéspontja a k körre esik.
Imolay András feladata



Megoldás: Legyen a BC oldal felezőpontja H, a BG és CF szakaszok metszéspontja pedig I. Jelölje O az FGI háromszög köréírt körének középpontját. Legyen továbbá $\alpha = CBG\sphericalangle$ szög nagysága. Elég belátnunk, hogy az $OGC\sphericalangle = 90°$, mert akkor a FGI kör érinti a szárakat, vagyis I rajta van a k körön.
Mivel F és G a szárak felezőpontjai, ezért $BF = CG = BC = 1$ cm. Vagyis a BCG háromszög egyenlő szárú, amiből $IGC\sphericalangle = \alpha$. Mivel az ábra szimmetrikus BC felezőmerőlegesére, ezért az IH és BC egyenesek merőlegesek egymásra. Ebből kapjuk, hogy $BIH\sphericalangle = 90° - \alpha$, amiből $OIG\sphericalangle = 90° - \alpha$. Viszont mivel O az FGI kör középpontja, ezért $OGI\sphericalangle = OIG\sphericalangle = 90° - \alpha$. Ebből következik, hogy $OGC\sphericalangle = OGI\sphericalangle + IGC\sphericalangle = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Ezzel beláttuk az állítást.

E2. Amikor Andris belépett a terembe, a táblán a 3 és a 24 számok szerepeltek. Egy lépésben, ha a táblán szerepelnek a (nem feltétlenül különböző) k és n számok, akkor Andris a $kn + k + n$ számot is felírhatja.
a) Elérheti-e Andris, hogy néhány lépés után a 9999999 szerepeljen a táblán?
b) Mi a helyzet, ha a 99999999-et akarja elérni?
c) Na és ha a 48999999-et?
Imolay András feladata

Megoldás: Vegyük észre, hogy a táblán csak olyan számok szerepelhetnek, amelyek eggyel kisebbek, mint egy négyzetszám. A 3 és a 24 is ilyen, így azt kell belátnunk, hogy ha egy lépést megelőzően minden szám, amely a táblán szerepel, egy négyzetszám megelőzője, akkor az ebben a lépésben Andris által felírt szám is ilyen lesz: valóban, ha k, n a táblán szerepelnek, Andris pedig a $kn+k+n = (k+1)(n+1)-1$ számot írja fel, az is ilyen lesz, mivel $k + 1$ és $n + 1$ négyzetszámok, így a szorzatuk is.

a) A fentiek alapján nem érheti el, hiszen $9999999 + 1 = 10000000$ nem négyzetszám.

b) Elérheti a következő lépéssorozattal: a 3-ból és a 24-ből megkapja a $3 \cdot 24 + 3 + 24 = 99$-et, majd a 99-ből eléri a $99 \cdot 99 + 99 + 99 = 9999$-et, végül pedig ebből a $9999 \cdot 9999 + 9999 + 9999 = 99999999$-et.

c) Vegyük észre, hogy az is teljesül a táblán szereplő számokra, hogy a rákövetkezőjüknek csak a 2 és az 5 a prímosztói. Ezt hasonlóan bizonyítjuk. A két kezdeti számra (3 és 24) teljesül az állítás, illetve ha egy lépés előtt minden táblán szereplő számra teljesül, akkor az ebben a lépésben Andris által felírt számra is teljesülni fog: valóban, ha k, n a táblán szerepelnek, Andris pedig a $kn + k + n = (k + 1)(n + 1) - 1$ számot írja fel, az is ilyen lesz, mivel $k + 1$ és $n + 1$ prímosztói csak a 2 és az 5, így a szorzatuké is. Ezek alapján Andris nem érheti el a $48999999 = 49000000 - 1$ számot, hiszen a 49000000 osztható 7-tel is.

E3. **a)** Négy kereskedő szeretne Athénból Rómába elutazni szekérrel. Ugyanazon a napon, de különböző időpontokban indulnak Athénból és egy másik napon érkeznek meg Rómába, de éppen fordított sorrendben. Minden nap, amikor leszáll az est, minden kereskedő betér az úton következő fogadóba aludni. Amikor néhány kereskedő ugyanabban a fogadóban alszik egy éjszaka, akkor másnap pirkadatkor az érkezéshez képest fordított sorrendben indulnak tovább, mert a fogadók melletti szűk utcákban csak így tudnak parkolni. Az úton nem tudják megelőzni egymást, csak a fogadókban együtt eltöltött éjszakák során változik a sorrendjük. Végül minden kereskedő megérkezik Rómába úgy, hogy menet közben minden másik kereskedővel pontosan egyszer alszik ugyanabban a fogadóban. Lehetséges-e, hogy minden éjszaka páros számú különböző fogadóban alszanak?
b) Lehetséges-e akkor, ha a 4 helyett 8 kereskedő utazik és minden más feltétel változatlan?
Kocsis Anett feladata

Megoldás: a) Legyen a négy kereskedő A, B, C, D, és tegyük fel, hogy ábécé sorrendben indultak

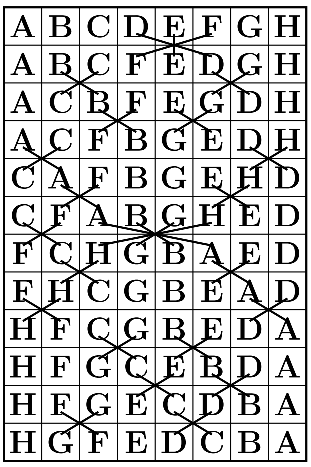
Mivel minden éjszaka páros számú fogadóban alszanak, így minden éjjel vagy 2 vagy 4 fogadót foglalnak el. Ha az utóbbi áll fenn, akkor mindenki külön szálláson alszik. Ekkor nem változik az, hogy ki kivel aludt már egy helyen, és a kereskedők sorrendje sem, ezért feltehetjük, hogy ez az eset nem fordul elő. Következésképp minden éjjel vagy $2+2$ vagy $3+1$ eloszlásban aludtak.

Tegyük fel először, hogy az első éjjel $3+1$ eloszlásban alszanak. Szimmetria miatt feltehető, hogy $ABC + D$ és $A + BCD$ lehetőségek közül az előbbi áll fenn, így másnap a sorrendjük C, B, A, D-re változik. A következő előzésnek D és A között kéne lennie. Viszont A, B és C közül már semelyik kettő nem alhat egy helyen, így a következő éjjel $C + B + AD$ lesz az eloszlásuk, ekkor azonban 3 fogadót foglalnak el, ami ellentmond a feladat feltételének.

Tegyük fel most, hogy első éjjel $2+2$ eloszlásban alszanak. Ekkor az első éjjel mindenképp $AB+CD$ eloszlásban alszanak, vagyis másnap a sorrendjük B, A, D, C. Azonban A és B, illetve C és D már nem alhatnak egy helyen, következésképp a következő éjszaka csak $B + AD + C$ lehet az eloszlásuk. Ekkor azonban megint 3 különböző fogadóban alszanak. Ezzel beláttuk, hogy nem tudnak a feltételeknek megfelelően eljutni Rómába.

b) Használjuk az alábbi táblázatot a kereskedők mozgásának jelölésére. Minden sorban a kereskedők aznapi sorrendje látható. Azon kereskedők, akik pozíciót változtattak, egy vonallal hozzá vannak kötve a következő napi pozíciójukhoz. Ha néhány ilyen vonal metszi egymást, akkor azok a kereskedők a két nap közti éjszaka egy fogadóban alszanak.

Tekintsük az ábrán látható konstrukciót. Könnyű ellenőrizni, hogy ez tényleg megfelelő. Leírunk egy gondolatmenetet, ami egyrészt megkönnyítheti, hogy találjunk egy ehhez hasonló konstrukciót, másrészt általánosan működik páros darab kereskedő esetén is.



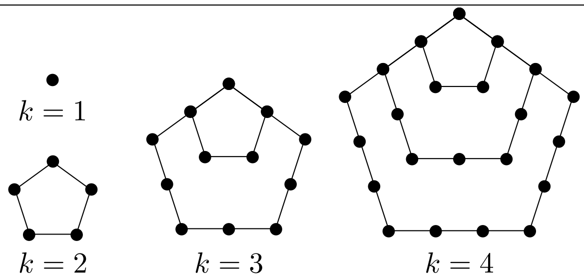
A megoldás felépítése a következő: előbb 6 kereskedőre készítünk egy konstrukciót; például egy megoldást kapunk, ha a fenti konstrukcióból az A és H kereskedőket elhagyjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez még mindig teljesíti a feladat feltételét, vagyis hogy minden éjszaka összesen páros számú különböző fogadóban aludtak. Ebből 8 (és hasonlóan bármely $2n$ kereskedő esetén) úgy kapunk megoldást, hogy elhelyezünk az eredeti 6 kereskedő jobb és bal oldalára egy-egy további kereskedőt (általános esetben $(n-3)$-at mindkét oldalra), jelen esetben A-t és H-t. Ezután addig a napig, amíg C és F illetve B és G alszanak egy szálláson, nem változtatunk a hozzáadott kereskedők egymás közti sorrendjén. Mielőtt a CF és BG cserét végrehajtjuk, az A és H kereskedőket cserékkel középre hozzuk (általános esetben az összes hozzáadottat), majd a BG csere helyett az $ABGH$ sorrendjét felcserélő lépést hajtjuk végre (általános esetben az egész középre hozott blokkot megfordítjuk).

Ezután A-t és H-t (ill. az összes hozzáadott kereskedőt) cserékkel a sor szélére visszük, majd a 6 középső kereskedőnek befejezzük a cseréit az ábrán látható módon, ekkor a többi kereskedő helyzete már nem változik.

Így a feltételeknek megfelelve sikerült megfordítani a kereskedők sorrendjét, ha eredetileg páros számú, legalább 6 kereskedő volt.

E4. Bizonyítsátok be, hogy minden $n \geq 3$ egészre végtelen sok n-szögszám létezik, ami előáll két másik (nem feltétlenül különböző) n-szögszám összegeként!

Az első n-szögszám az 1. A k-adik n-szögszám ($k \geq 2$-re) a közös csúcsból, azonos irányba rajzolt, $1 \leq \ell \leq k-1$ cm oldalhosszúságú összes szabályos n-szög csúcsai és oldal-ℓ-edelő pontjai közül a különböző pontok száma. Például az első négy ötszögszám az 1, 5, 12 és 22, lásd ábra.



Osztényi József feladata

Megoldás: Jelölje adott n-re a k-adik n-szögszámot a_k. Ekkor felírható az alábbi összefüggés: $a_{k+1} = a_k + k \cdot (n-2) + 1$, hisz a $(k+1)$-edik n-szögszámot úgy kaphatjuk meg a k-adikból, hogy hozzáadjuk a k oldalhosszúságú n-szög eddigiektől különböző pontjainak (csúcsok és k-adoló pontok) számát, amit kiszámolhatunk például úgy, hogy a k oldalhosszúságú n-szögnek van $n \cdot k$ darab pontja és ebből $k+(k-1)$ pont közös. Ebből vonjunk le két tanulságot: az n-szögszámok szigorúan nőnek ($n \geq 3$), azaz adott n-re nincs két azonos n-szögszám és az $(n-2)$-vel való osztási maradékuk mindig 1-el nő. Tehát minden n-re és tetszőleges N-re létezik k_1, hogy a_{k_1} 1-et ad maradékul $(n-2)$-vel osztva és $k_1 \geq N$, legyen $k_2 = \frac{a_{k_1}-1}{n-2}$, ekkor k_2 egész. Így $a_{k_2+1} = a_{k_2} + a_{k_1}$, hisz minden k-ra $a_{k+1} = a_k + k \cdot (n-2) + 1$, így k_2-re is $a_{k_2+1} = a_{k_2} + k_2 \cdot (n-2) + 1$ és a k_2 meghatározásából következik a kívánt egyenlőség. Tetszőlegesen nagy ilyen tulajdonságú k_1 van, tehát tényleg végtelen sok megfelelő n-szögszám van.

E5. A Görögország-Egyiptom kosárlabdameccs első negyedének végén 26-25 volt az állás. Áron minden görög kosár után felírta, hogy hány pontja van a görögöknek, míg Benedek minden egyiptomi kosár után felírta, hogy hány pontja van az egyiptomiaknak. A szünetben észrevették, hogy a felírt számaik közt nincs két egyforma. Hányféleképpen írhatta fel Benedek és Áron a számokat, ha az első negyedben 21 kosár volt, és mindegyik kosár 2 vagy 3 pontot ért?
Két felírási lehetőséget különbözőnek tekintünk, ha valamelyikük más számokat írt fel.
Nagy Kartal feladata

Megoldás: Írjuk le a számokat 1-től 26-ig, és színezzük ki pirosra azokat a számokat, amiket Áron felírt, és kékre azokat, amiket Benedek írt fel. Tudjuk, hogy nincs olyan szám amit mindketten felírtak, ezért minden számot legfeljebb egyszer színeztünk ki. Összesen 21 kosár esett, ezért a számok közül pontosan 5 nem lett kiszínezve, ezeket töröljük ki a sorozatból.

Ekkor a megmaradó 21 szám felváltva lesz piros és kék, mert ha lenne két egymást követő egyszínű szám, akkor az azokat megelőző és követő másik színű számok különbsége legalább 4 lenne, de tudjuk, hogy csak 2 és 3 pontos kosarak estek.

Ezután nézzük meg, hogy melyik számok maradtak ki. Az 1-es kimaradt, mert minden kosár 2 vagy 3 pontos. Két kitörölt szám különbsége nem lehet 1, mert akkor legyen az előttük lévő kiszínezett szám piros, de a következő színezett szám tudjuk, hogy kék, ezért a következő piros és legalább 4-re van, ami nem lehet. Hasonlóan nem lehet két kitörölt kitörölt szám különbsége 2 sem. Vagyis bármely két kitörölt szám különbsége legalább 3.

Ha tudjuk, hogy melyik számok lettek kitörölve, akkor egyértelműen megadható, hogy milyen számokat írt le Áron és Benedek, mert a megmaradó számokat felváltva kiszínezzük pirossal és kékkel úgy, hogy az utolsó szám, a 26 piros legyen. És ha a kitörölt számok közül bámely kettő különbsége legalább 3, akkor az egymást követő piros számok különbsége 2 vagy 3 lesz, hasonlóan a kék számokra is.

Tehát elég megadnunk, hogy hányféleképpen tudjuk kiválasztani a kimaradó számokat. Tudjuk, hogy bármely kettő különbsége legalább 3, és a 2, 3, 25, 26 számokat nem lehet kitörölni. Vagyis 4-től 24-ig kell kiválasztani négy számot, hogy különbségük legalább 3 legyen. Egy-egy ilyen válaszátás megfeleltethető négy klönböző szám kiválasztásával 1-től 15-ig úgy, hogy a legkisebb számból 3-at vonunk ki, a másodikból 5-öt, a harmadikból 7-et és a negyedikből 9-et. Ez a megfeleltetés megfordítható, így pontosan annyi megfelelő választásunk van a négy szám kimaradására, mint ahányféleképp 1-től 15-ig 4 különböző számot ki lehet választani. Ezt $\binom{15}{4}$-féleképpen lehet megtenni.

Tehát a válasz $\binom{15}{4}$.

E6. **Játék:** Adott négy, korongokból álló kupac, melyek 1-től 4-ig vannak számozva. Egy lépésben a soron következő játékos választ m és n egész számokat, melyekre $1 \leq m < n \leq 4$, majd az n sorszámú kupacból elvesz m korongot, és az $n-1, n-2, \ldots, n-m$ sorszámú kupacokba egyesével szétosztja az elvett korongokat. Az veszít, aki nem tud a szabályoknak megfelelően lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A négy kupac méretének ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Fraknói Ádám feladata

Megoldás: Világos, hogy a játék véges. Pontosan akkor van nyerő stratégiája a második játékosnak, ha a 2-es kupacban páros sok korong van és a 4-esben $5k$ vagy $5k+2$ alakú, vagy ha a 2-esben páratlan van és a 4-esben $5k+1$ alakú. Azt kell meggondolni, hogy ilyen alakú állásból nem tudunk ilyen alakúba lépni, és bárhonnan máshonnan pedig igen.

Nem ilyen állásból tudunk ilyenbe lépni, hiszen ha a 4-es kupacban $5k+3$ vagy $5k+4$ korong van, akkor ha 2 vagy 3 korongot veszünk el belőle, akkor mindkét esetben az 2-es kupac paritása megváltozik, így kiválaszthatjuk, hogy az $5k$ és $5k+1$, illetve $5k+1$ és $5k+2$ közül melyik az alkalmas a stratégiához. Ha $5k$ vagy $5k+2$ van a 4-es kupacban, akkor páratlan van a 2-es kupacban, így onnan elvehetünk egyet és megfelelő állást érünk el, míg ha $5k+1$ van a 4-esben, akkor onnan 1-et elvéve szintén megfelelőt kapunk, mivel ekkor párosnak kell lennie az 2-es kupacban.

Egy ilyen állásból nem lehet ilyenre lépni, mivel ha a 2-es vagy 3-as kupacból vesz el, akkor a 2-es kupac paritása változik, míg a 4-es kupac helyben marad, ha pedig a 4-es kupacból vesz el úgy, hogy az ne $5k+3$ vagy $5k+4$ alakú legyen, akkor ha $5k$ alakú volt, akkor 3-at kell elvennie, ekkor viszont $5k+2$ alakú lesz és a 2-es kupac paritása változik, ha pedig $5k+1$ vagy $5k+2$ volt, akkor nem vehet el 3-at, ekkor pedig vagy 1-et vesz el, vagyis a 4-es kupac csökken eggyel és a 2-es nem változik, vagy (ha $5k+2$ alakú) 2-őt vesz el, ekkor pedig a 2-es paritása változik, a 4-es pedig $5k+2$-ről $5k$-ra változik, ami megintcsak nem ilyen állás.

Megjegyzés:

A megoldáshoz az alábbi ötlettel is el lehet jutni. Vegyük azt a függvényt, ami a játék állásaihoz rendel természetes számokat a következő módon: $f(A) = 3 \cdot a_4 + 2 \cdot a_3 + a_2$, ahol az a_i az A állapotban az i-edik kupacban lévő korongok száma. Látható, hogy 1 korong áthelyezése esetén ez a függvény 1-gyel, 2 esetén 3-mal, 3 esetén 6-tal csökken, a játék pedig az $f(A) = 0$-áig tart. A két játékos felváltva lép páros és páratlan értékekre, kivétel az, amikor valamelyik játékos 3 korongot helyez át, vagyis a játék nyertese azoknak a lépésnek a paritásától függ, amikor egyszerre 3 korongot helyezünk át.

Most nézzük a 4-es kupacot. (A 4-es kupacon kívül mindenki csak úgy tud korongot elvenni, hogy változtatja a paritást.) A 4-es kupacból át lehet tenni 3 korongot úgy, hogy a paritás maradjon, vagy 1-et vagy 2-öt úgy, hogy a paritás megváltozzon.

Ez alapján az alábbi táblázat készíthető, ahol az Ny jelöli azokat az állapotokat, ahonnan a soron következő játékos nyerni tud. A táblázat mezői 10-es ciklusonként ismétlődnek, így ugyanazok a nyerő mezők adódnak mint a fenti indoklásban.

a_4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f(A) páros	Ny	Ny	Ny	V	V	V	V	V	V	V	Ny	Ny	Ny	V
f(A) páratlan	V	V	V	V	V	Ny	Ny	Ny	V	V	V	V	V	V