1. Bizonyítsátok be, hogy egy $1 \times r$ méretű téglalap kerülete minden r pozitív valós szám esetén lefedhető egységsugarú körlapokkal, melyek páronként nem metszik egymást.
A körök érinthetik egymást.

2. a) Oldjátok meg az $a^2 + b^2 + c^2 = abc$ egyenletet, ahol a, b és c pozitív prímszámok.
b) Bizonyítsátok be, hogy minden N pozitív egész számra léteznek $a, b, c \geq N$ egészek, amelyek teljesítik az $a^2 + b^2 + c^2 = abc$ egyenletet.

3. A Görögország-Egyiptom kosárlabdameccs első negyedének végén 26-25 volt az állás. Áron minden görög kosár után felírta, hogy hány pontja van a görögöknek, míg Benedek minden egyiptomi kosár után felírta, hogy hány pontja van az egyiptomiaknak. A szünetben észrevették, hogy a felírt számaik közt nincs két egyforma. Hányféleképpen írhatta fel Benedek és Áron a számokat, ha az első negyedben 21 kosár volt, és mindegyik kosár 2 vagy 3 pontot ért?
Két felírási lehetőséget különbözőnek tekintünk, ha valamelyikük más számokat írt fel.

4. Adott az $n \geq 2$ egész szám. Az n emeletes piramis $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ darab $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1$ m-es kockából áll, minden kocka márványból vagy homokkőből van. A k-adik szinten a kockák egy $(n+1-k) \times (n+1-k)$ méretű négyzet alakban helyezkednek el, és minden $1 \leq k \leq n$ esetén ezen négyzetek középpontjai ugyanarra a függőleges egyenesre esnek. Emellett a kockák lapjai párhuzamosak, azaz a piramis mindegyik kockája vagy a földön van, vagy 4 másik kockán áll. A legfelső kockát márványból építették, és az épület stabilitása érdekében minden márvány kockára igaz, hogy vagy a földön van, vagy az alatta lévő 4 kockából legalább 3 márvány. Ezen feltételek alapján legalább hány darab márvány kocka van a piramisban?

5. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, és jelölje a köréírt körének középpontját O. Legyenek O_A, O_B és O_C rendre a BCO, CAO és ABO háromszögek köréírt köreinek középpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az AO_A, BO_B és CO_C egyenesek egy ponton mennek át.

6. Játék: Adott négy, korongokból álló kupac, melyek 1-től 4-ig vannak számozva. Egy lépésben a soron következő játékos választ m és n egész számokat, melyekre $1 \leq m < n \leq 4$, majd az n sorszámú kupacból elvesz m korongot, és az $n-1, n-2, \ldots, n-m$ sorszámú kupacokba egyesével szétosztja az elvett korongokat. Az veszít, aki nem tud a szabályoknak megfelelően lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A négy kupac méretének ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVI. Dürer Verseny szervezői