kategória

E+

9-12.
osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
KIFEJTŐS
MEGOLDÓKULCS

E+1. Bizonyítsátok be, hogy egy $1 \times r$ méretű téglalap kerülete minden r pozitív valós szám esetén lefedhető egységsugarú körlapokkal, melyek páronként nem metszik egymást.
A körök érinthetik egymást.
Váli Benedek feladata

Megoldás: Vegyünk fel a derékszögű koordináta rendszerben egységkörlapokat a következő középpontokkal: $(-1,(2k-\frac{1}{2})\sqrt{3})$, $(1,(2k-\frac{1}{2})\sqrt{3})$ és $(0,(2k+\frac{1}{2})\sqrt{3})$ alakú pontok, ahol k egész szám. Ezek a körlapok nem metszik egymást, csak érintik, hiszen két körlap azonos fajtájú, akkor a középpontok távolsága legalább $2\sqrt{3}$, egy első és egy második fajtájú körlap középpontjainak távolsága legalább 2, és egy harmadik és egy másik fajtájú körlap távolsága legalább 2.

Könnyű látni, hogy ezek a körlapok lefedik az $x=-\frac{1}{2}$ és $x=\frac{1}{2}$ egyeneseket, illetve hogy a $(-\frac{1}{2},t)$ és $(\frac{1}{2},t)$ pontokat összekötő szakasz $t \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[2k\sqrt{3},(2k+1)\sqrt{3}\right]$ esetén le van fedve egy harmadik fajtájú körlap által. Viszont emiatt ha $\left\lfloor \frac{r}{\sqrt{3}} \right\rfloor$ páros szám, akkor a $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},r)$ és $(-\frac{1}{2},r)$ pontok egy $1 \times r$-es téglalapot alkotnak amelynek a kerülete le van fedve az egységkörlapokkal, amennyiben pedig $\left\lfloor \frac{r}{\sqrt{3}} \right\rfloor$ páratlan, $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},-r)$ és $(-\frac{1}{2},-r)$ pontok alkotnak egy $1 \times r$-es téglalapot, melynek a kerülete le van fedve a körlapok által.

E+2. **a)** Oldjátok meg az $a^2 + b^2 + c^2 = abc$ egyenletet, ahol a, b és c pozitív prímszámok.
b) Bizonyítsátok be, hogy minden N pozitív egész számra léteznek $a, b, c \geq N$ egészek, amelyek teljesítik az $a^2+b^2+c^2 = abc$ egyenletet.
Beke Csongor feladata

Megoldás: a) Nézzük meg az egyenletet modulo 3! Ha $p \neq 3$ egy prím, akkor $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Ezért ha egyik prím sem 3, akkor a bal oldal osztható 3-mal, de a jobb nem, ellentmondás. Ezért legalább az egyik prím 3, ekkor a jobb oldal osztható 3-mal. Az előző észrevétel miatt, a bal oldal csak akkor lehet osztható 3-mal ha mindegyik szám 3. Az $a = b = c = 3$ pedig teljesíti az egyenletet.

b) Tegyük fel, hogy (a, b, c) megoldás, amire $a \leq b \leq c$. Ekkor az $f(x) = x^2 - bcx + b^2 + c^2$ egyenlet egy egész együtthatós 1 főegyütthatóju másodfokú egyenlet, aminek az egyik gyöke a, azaz egész. Ekkor a másik gyök a' is egész (Viéta-jumping), és (a', b, c) is megoldása az eredeti egyenletnek. Valamint $a' = \frac{b^2+c^2}{a} \geq b + c > a$, ezért bármely megoldáshoz tudunk találni egy megoldást, amiben a változók közül a legkisebb nőtt, a másik 2 pedig nem változott. A $(3, 3, 3)$ megoldásból indulva a fenti lépést legalább $3N - 9$-szer ismételve eljutunk egy megoldásig, amire teljesül hogy $a, b, c \geq N$.

E+3. A Görögország-Egyiptom kosárlabdameccs első negyedének végén 26-25 volt az állás. Áron minden görög kosár után felírta, hogy hány pontja van a görögöknek, míg Benedek minden egyiptomi kosár után felírta, hogy hány pontja van az egyiptomiaknak. A szünetben észrevették, hogy a felírt számaik közt nincs két egyforma. Hányféleképpen írhatta fel Benedek és Áron a számokat, ha az első negyedben 21 kosár volt, és mindegyik kosár 2 vagy 3 pontot ért?
Két felírási lehetőséget különbözőnek tekintünk, ha valamelyikük más számokat írt fel.
Nagy Kartal feladata

Megoldás: Írjuk le a számokat 1-től 26-ig, és színezzük ki pirosra azokat a számokat, amiket Áron felírt, és kékre azokat, amiket Benedek írt fel. Tudjuk, hogy nincs olyan szám amit mindketten felírtak, ezért minden számot legfeljebb egyszer színeztünk ki. Összesen 21 kosár esett, ezért a számok közül pontosan 5 nem lett kiszínezve, ezeket töröljük ki a sorozatból.

Ekkor a megmaradó 21 szám felváltva lesz piros és kék, mert ha lenne két egymást követő egyszínű szám, akkor az azokat megelőző és követő másik színű számok különbsége legalább 4 lenne, de tudjuk, hogy csak 2 és 3 pontos kosarak estek.

Ezután nézzük meg, hogy melyik számok maradtak ki. Az 1-es kimaradt, mert minden kosár 2 vagy 3 pontos. Két kitörölt szám különbsége nem lehet 1, mert akkor legyen az előttük lévő kiszínezett szám piros, de a következő színezett szám tudjuk, hogy kék, ezért a következő piros és legalább 4-re van, ami nem lehet. Hasonlóan nem lehet két kitörölt kitörölt szám különbsége 2 sem. Vagyis bármely két kitörölt szám különbsége legalább 3.

Ha tudjuk, hogy melyik számok lettek kitörölve, akkor egyértelműen megadható, hogy milyen számokat írt le Áron és Benedek, mert a megmaradó számokat felváltva kiszínezzük pirossal és kékkel úgy, hogy az utolsó szám, a 26 piros legyen. És ha a kitörölt számok közül bámely kettő különbsége legalább 3, akkor az egymást követő piros számok különbsége 2 vagy 3 lesz, hasonlóan a kék számokra is.

Tehát elég megadnunk, hogy hányféleképpen tudjuk kiválasztani a kimaradó számokat. Tudjuk, hogy bármely kettő különbsége legalább 3, és a 2, 3, 25, 26 számokat nem lehet kitörölni. Vagyis 4-től 24-ig kell kiválasztani négy számot, hogy különbségük legalább 3 legyen. Egy-egy ilyen válaszátás megfeleltethető négy klönböző szám kiválasztásával 1-től 15-ig úgy, hogy a legkisebb számból 3-at vonunk ki, a másodikból 5-öt, a harmadikból 7-et és a negyedikből 9-et. Ez a megfeleltetés megfordítható, így pontosan annyi megfelelő választásunk van a négy szám kimaradására, mint ahányféleképp 1-től 15-ig 4 különböző számot ki lehet választani. Ezt $\binom{15}{4}$-féleképpen lehet megtenni.

Tehát a válasz $\binom{15}{4}$.

E+4. Adott az $n \geq 2$ egész szám. Az n emeletes piramis $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ darab 1 m $\times$ 1 m $\times$ 1 m-es kockából áll, minden kocka márványból vagy homokkőből van. A k-adik szinten a kockák egy $(n+1-k) \times (n+1-k)$ méretű négyzet alakban helyezkednek el, és minden $1 \leq k \leq n$ esetén ezen négyzetek középpontjai ugyanarra a függőleges egyenesre esnek. Emellett a kockák lapjai párhuzamosak, azaz a piramis mindegyik kockája vagy a földön van, vagy 4 másik kockán áll. A legfelső kockát márványból építették, és az épület stabilitása érdekében minden márvány kockára igaz, hogy vagy a földön van, vagy az alatta lévő 4 kockából legalább 3 márvány. Ezen feltételek alapján legalább hány darab márvány kocka van a piramisban?
Beke Csongor feladata

Megoldás: Válasz: Legalább n^2 kocka van márványból.

Konstrukció n^2 márvány kockára: Minden szinten a dél-nyugati sarokból az észak-keleti sarokig tartó átló, és a mellette 1-gyel keletre lévő átló van márványból. Ekkor teljesülnek a feltételek és összesen n^2 márványkocka van.

Bizonyítás arra, hogy ennél kevesebb márványkocka nem lehet: Azt fogjuk igazolni, hogy egy $k \times k$-as szinten $2k-1$ márványkocka kell. Ehhez két segédállítást látunk be.

1. segédállítás: Minden szinten összefüggő a márvány kockák halmaza, ahol azokat a kockákat tekintjük szomszédosnak, amik lappal érintkeznek. Ezt fentről lefelé indukcióval bizonyítjuk be. Világos, hogy a legfelső szint összefüggő. Abból a feltételből, hogy mindegyik márványkocka alatt legalább 3 márvány kocka van, egyenesen következik az indukciós lépés.

2. segédállítás: Minden szinten a $k \times k$-as négyzet minden oldalát érintik a márvány kockák. Indukcióval bizonyítunk. A legfelső szintre világosan teljesül. Indukciós lépés: A fentebbi szinten a perem megfelelő oldalát érintő kocka alatti 4 kockából 2 érinti a lentebbi szinten is a perem megfelelő oldalát. Ebből a 2-ből legalább az egyik márvány, így készen vagyunk az indukcióval.

Befejezés: A két segédállítás kombinálásával megkapjuk hogy a $k \times k$-as szinten van egy márvány kockákból álló út keletről nyugatra és délről északra is. Ezek az utak belsejében van legalább $(k-1)$ észak-dél lépés és legalább $(k-1)$ kelet-nyugat. Számoljuk meg ezen a szinten a kockák függőleges oldalait. Ha mind a 4 irányból ránézünk, akkor a homokköveket átlátszónak tekintve látunk k oldalt, valamint minden belső lépésnél van még 2 oldal amit nem látunk. Ezért a szinten legalább $4k+2\cdot 2(k-1)$ függőleges oldal van, azaz legalább $2k-1$ márványkocka.

E+5. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, és jelölje a köréírt körének középpontját O. Legyenek O_A, O_B és O_C rendre a BCO, CAO és ABO háromszögek köréírt köreinek középpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az AO_A, BO_B és CO_C egyenesek egy ponton mennek át.
Váli Benedek feladata

1. Megoldás:

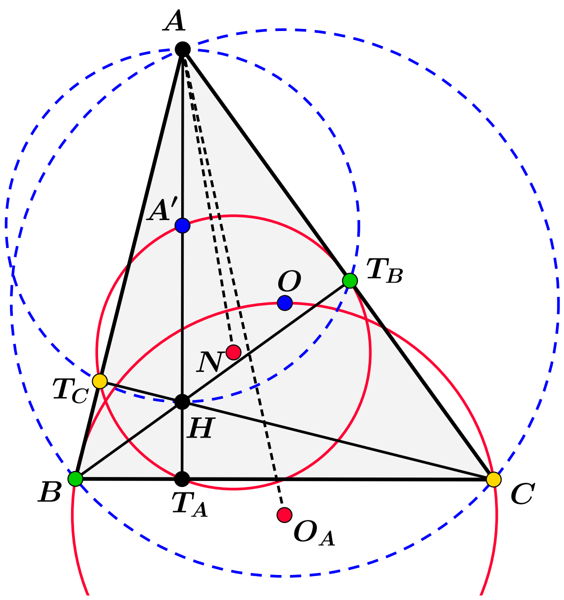
Legyenek az ABC háromszög magasságainak talppontjai rendre T_A, T_B és T_C. Jelölje továbbá H az ABC háromszög magasságpontját, A' az AH szakasz felezőpontját, illetve N a Feuerbach kör középpontját. Definiáljuk az f transzformációt az A középpontú $\frac{AT_B}{AB}$ arányú középpontos nagyítás és az A csúcsnál lévő belső szögfelezőre való tengelyes tükrözés szorzataként!

Világos, hogy f B-t T_B-be viszi. Viszont $ABC\triangle \sim AT_CT_B\triangle$ a szögek egyezése miatt, és f hasonlósági transzformáció, így f C-t T_C-be viszi. Vegyük észre, hogy T_C és T_B rajta vannak az AH szakasz Thalész körén, így az (AT_CT_B) kör középpontja A'. Viszont f hasonlósági transzformáció, így az (ABC) kör középpontját, O-t, az (AT_CT_B) kör középpontjába viszi. Tehát O képe A'.

A fentiek miatt f a (BCO) kört a (T_BT_CA') körbe viszi. Ismert, hogy A' is rajta van a Feuerbach körön, így a (BCO) kör a Feuerbach körbe megy f által, tehát a körök középpontjai egymás képei: f O_A-t N-be viszi.

Mivel a transzformáció A-t helyben hagyja, az AO_A egyenest az AN egyenesbe viszi. Tudjuk, hogy az A-ból való középpontos nagyítás AO_A-t magába viszi, tehát az AO_A és AN egyenesek egymás tükörképei a belső szögfelezőre nézve. Emiatt AO_A áthalad az N pont izogonális konjugáltján.

A fenti gondolatmenet megismételhető a BO_B és a CO_C egyenesekre, így mindhárom egyenes áthalad a Feuerbach kör középpontjának izogonális konjugáltján. Ezzel a bizonyítást befejeztük.



Megjegyzés: A három egyenes közös metszéspontjának neve is van: Kosnita-pont (a háromszög nevezetes pontjainak enciklopédiájában az X_{54} nevet kapta), és ahogy az a megoldásból kiderül, ez a pont a Feuerbach-kör középpontjának izogonális konjugáltja. Maga a feladat állítása egyébként a román matematikus, Cezar Coşniţă nevéhez fűződik (gyakran Kosnita-tételként hivatkoznak rá).

2. Megoldás:

Kezdetben vegyük észre, hogy az AO szakasz felezőmerőlegesén rajta vannak az O_B, O_C pontok, hiszen ez a két pont két olyan háromszög körülírt körének középpontja, melynek egyik oldala AO. Tehát

$AO \perp O_BO_C$. Hasonlóan $BO \perp O_CO_A$ és $CO \perp O_AO_B$. Ekkor $O_CO_AB\angle = 90° - O_ABO\angle$. Viszont az OBO_AC egy deltoid, mivel $OB = OC$ és $O_AB = O_AC$ (egyenlő sugarak megfelelő körökben). Így $90° - O_ABO\angle = 90° - O_ACO\angle = O_BO_AC\angle$. Hasonlóan $O_AO_BC\angle = O_CO_BA\angle$ és $O_BO_CA\angle = O_AO_CB\angle$.

Legyen $A' = AO_A \cap O_BO_C$, $B' = BO_B \cap O_CO_A$ és $C' = CO_C \cap O_AO_B$. Továbbá jelölje α, β, γ rendre az előzőekben belátott egyenlő szögeket rendre az O_A, O_B, O_C pontok körül (az ábrán megfelelő színekkel jelöljük ezeket).

Az AO_BA', AO_CA', majd az AO_AO_B, AO_AO_C háromszögekre felírva a szinusz-tételt kapjuk, hogy

$$\frac{O_BA'}{O_CA'} = \frac{\frac{\sin A'AO_B\angle}{\sin\beta}\cdot AA'}{\frac{\sin A'AO_C\angle}{\sin\gamma}\cdot AA'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin A'AO_B\angle}{\sin A'AO_C\angle} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\frac{O_AO_B}{AO_A}\cdot\sin AO_BO_A\angle}{\frac{O_AO_C}{AO_A}\cdot\sin AO_CO_A\angle} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{O_AO_B\cdot\sin AO_BO_A\angle}{O_AO_C\cdot\sin AO_CO_A\angle}.$$

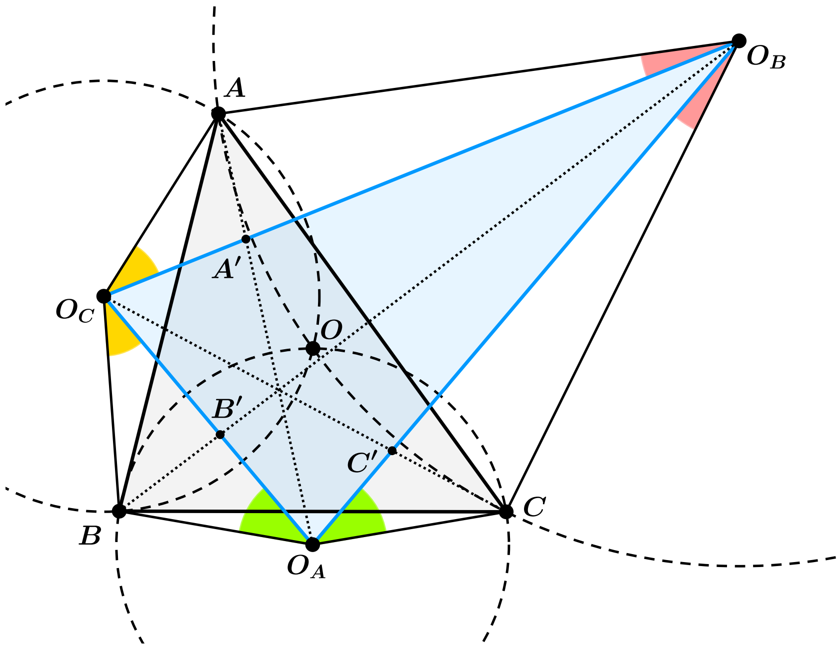
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{O_CB'}{O_AB'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{O_BO_C\cdot\sin BO_CO_B\angle}{O_BO_A\cdot\sin BO_AO_B\angle} \qquad \text{és} \qquad \frac{O_AC'}{O_BC'} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{O_CO_A\cdot\sin CO_AO_C\angle}{O_CO_B\cdot\sin CO_BO_C\angle}.$$

Viszont az egyenlő szögekből tudjuk, hogy $AO_BO_A\angle = CO_BO_C\angle$, $BO_CO_B\angle = AO_CO_A\angle$, továbbá $CO_AO_C\angle = BO_AO_B\angle$. A három egyenletet összeszorozva megkapjuk, hogy

$$\frac{O_BA'}{O_CA'}\cdot\frac{O_CB'}{O_AB'}\cdot\frac{O_AC'}{O_BC'} = 1,$$

ami Ceva-tételének megfordítása miatt azt jelenti, hogy az AO_A, BO_B, CO_C egyenesek egy ponton mennek át.



Megjegyzés: A bizonyítás lényegében a Jakobi-tételt látja be.

E+6. **Játék:** Adott négy, korongokból álló kupac, melyek 1-től 4-ig vannak számozva. Egy lépésben a soron következő játékos választ m és n egész számokat, melyekre $1 \leq m < n \leq 4$, majd az n sorszámú kupacból elvesz m korongot, és az $n-1, n-2, \ldots, n-m$ sorszámú kupacokba egyesével szétosztja az elvett korongokat. Az veszít, aki nem tud a szabályoknak megfelelően lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A négy kupac méretének ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Fraknói Ádám feladata

Megoldás: Világos, hogy a játék véges. Pontosan akkor van nyerő stratégiája a második játékosnak, ha a 2-es kupacban páros sok korong van és a 4-esben $5k$ vagy $5k+2$ alakú, vagy ha a 2-esben páratlan van és a 4-esben $5k+1$ alakú. Azt kell meggondolni, hogy ilyen alakú állásból nem tudunk ilyen alakúba lépni, és bárhonnan máshonnan pedig igen.

Nem ilyen állásból tudunk ilyenbe lépni, hiszen ha a 4-es kupacban $5k+3$ vagy $5k+4$ korong van, akkor ha 2 vagy 3 korongot veszünk el belőle, akkor mindkét esetben az 2-es kupac paritása megváltozik, így kiválaszthatjuk, hogy az $5k$ és $5k+1$, illetve $5k+1$ és $5k+2$ közül melyik az alkalmas a stratégiához. Ha $5k$ vagy $5k+2$ van a 4-es kupacban, akkor páratlan van a 2-es kupacban, így onnan elvehetünk egyet és megfelelő állást érünk el, míg ha $5k+1$ van a 4-esben, akkor onnan 1-et elvéve szintén megfelelőt kapunk, mivel ekkor párosnak kell lennie az 2-es kupacban.

Egy ilyen állásból nem lehet ilyenre lépni, mivel ha a 2-es vagy 3-as kupacból vesz el, akkor a 2-es kupac paritása változik, míg a 4-es kupac helyben marad, ha pedig a 4-es kupacból vesz el úgy, hogy az ne $5k+3$ vagy $5k+4$ alakú legyen, akkor ha $5k$ alakú volt, akkor 3-at kell elvennie, ekkor viszont $5k+2$ alakú lesz és a 2-es kupac paritása változik, ha pedig $5k+1$ vagy $5k+2$ volt, akkor nem vehet el 3-at, ekkor pedig vagy 1-et vesz el, vagyis a 4-es kupac csökken eggyel és a 2-es nem változik, vagy (ha $5k+2$ alakú) 2-őt vesz el, ekkor pedig a 2-es paritása változik, a 4-es pedig $5k+2$-ről $5k$-ra változik, ami megintcsak nem ilyen állás.

Megjegyzés:

A megoldáshoz az alábbi ötlettel is el lehet jutni. Vegyük azt a függvényt, ami a játék állásaihoz rendel természetes számokat a következő módon: $f(A) = 3 \cdot a_4 + 2 \cdot a_3 + a_2$, ahol az a_i az A állapotban az i-edik kupacban lévő korongok száma. Látható, hogy 1 korong áthelyezése esetén ez a függvény 1-gyel, 2 esetén 3-mal, 3 esetén 6-tal csökken, a játék pedig az $f(A) = 0$-áig tart. A két játékos felváltva lép páros és páratlan értékekre, kivétel az, amikor valamelyik játékos 3 korongot helyez át, vagyis a játék nyertese azoknak a lépésnek a paritásától függ, amikor egyszerre 3 korongot helyezünk át.

Most nézzük a 4-es kupacot. (A 4-es kupacon kívül mindenki csak úgy tud korongot elvenni, hogy változtatja a paritást.) A 4-es kupacból át lehet tenni 3 korongot úgy, hogy a paritás maradjon, vagy 1-et vagy 2-öt úgy, hogy a paritás megváltozzon.

Ez alapján az alábbi táblázat készíthető, ahol az Ny jelöli azokat az állapotokat, ahonnan a soron következő játékos nyerni tud. A táblázat mezői 10-es ciklusonként ismétlődnek, így ugyanazok a nyerő mezők adódnak mint a fenti indoklásban.

a_4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f(A) páros	Ny	Ny	Ny	V	V	V	V	V	V	V	Ny	Ny	Ny	V
f(A) páratlan	V	V	V	V	V	Ny	Ny	Ny	V	V	V	V	V	V