1. feladat

Feladatunk annak a vízhez viszonyított sebességértéknek a meghatározása, mely mellett motorcsónakunk üzemanyag-fogyasztása minimális lesz. Az útmutatásban közöltek alapján a motor hatásfoka állandó a teljes mozgás során, így a fogyasztás tulajdonképpen csak a motor által végzett munkától függ, ezt kell minimalizálnunk.

A szöveg alapján a teljes mozgás során a vízhez képest állandó nagyságú sebességgel haladunk, ennek feltétele, hogy a csónakunkra ható erők eredője zérus legyen. Mivel a csónakra ható erők közül csak a közegellenállási erőnek van a mozgás irányával párhuzamos komponense, az említett feltétel miatt a motor által kifejtett erő nagysága a haladás során megegyezik a közegellenállási erővel:

$$F = kv^2, \tag{1.1}$$

amely időben állandó. Emiatt a végzett munka a következőképpen írható (a vízhez rögzített vonatkoztatási rendszerben):

$$W = F\Delta s \cos\alpha. \tag{1.2}$$

Felhasználva (1.1)-et, valamint, hogy a teljes mozgás során a motor által kifejtett erő párhuzamos és azonos irányú az elmozdulással:

$$W = kv^2\Delta s. \tag{1.3}$$

A munka fenti kifejezésében már csak Δs az ismeretlen, mely az általunk megtett út a vízhez viszonyítva. A folyóhoz képest megtett út meghatározásához elsőként határozzuk meg a mozgás idejét! A „felfelé” evezés során a parthoz viszonyított sebességünk:

$$v_{\mathrm{fel}} = v - c, \tag{1.4}$$

ezzel a sebességgel tesszük meg a d utat, azaz a felfelé evezés ideje:

$$t_{\mathrm{fel}} = \frac{d}{v-c}. \tag{1.5}$$

A fenti gondolatmenet alapján a „lefelé” mozgás során a partról látott sebesség:

$$v_{\mathrm{le}} = v + c, \tag{1.6}$$

ekkor a lefelé evezés ideje:

$$t_{\mathrm{le}} = \frac{d}{v+c}. \tag{1.7}$$

Az előzőek alapján a teljes mozgás ideje:

$$t = t_{\mathrm{fel}} + t_{\mathrm{le}} = \frac{2dv}{v^2-c^2}. \tag{1.8}$$

Mivel a folyóhoz viszonyítva állandó nagyságú sebességgel haladunk, a vízhez képest megtett út a mozgás idejét ismerve a következőképpen írható:

$$\Delta s = vt = \frac{2dv^2}{v^2-c^2}. \tag{1.9}$$

Összefoglalva a (1.3) és (1.9) egyenleteket a motor által végzett munka:

$$W = \frac{2kdv^4}{v^2 - c^2}. \tag{1.10}$$

A feladat feltételei alapján az (1.10) kifejezésnek keressük a minimumát v függvényében. Mivel a $2kd$ tényező konstans, tulajdonképpen elegendő a $v^4 / \left(v^2 - c^2\right)$ törtet vizsgálni. Vezessük be az $x = c^2/v^2$ jelölést, ezzel a fenti kifejezés a következőképpen alakítható:

$$\frac{v^2}{1 - x} = \frac{c^2/x}{1 - x} = \frac{c^2}{x\,(1 - x)}. \tag{1.11}$$

Mivel c értéke adott, az összefüggésnek akkor lesz minimuma, ha a tört nevezője maximális. A feladat paraméterezéséből tudjuk, hogy $v > c > 0$, azaz $x < 1$ (ellenkező esetben nem tudnánk a folyón „felfelé” haladni). Ezeket a feltételeket felhasználva felírhatjuk a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x\,(1 - x)} \leq \frac{x + (1 - x)}{2} = \frac{1}{2}. \tag{1.12}$$

Tudjuk, hogy egyenlőség éppen akkor áll fenn, ha $x = 1 - x$, azaz $x = 1/2$. Ebben az esetben a v sebességre a következő érték adódik:

$$\boxed{v = \sqrt{2}c \approx 0,71\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}. \tag{1.13}$$

Megjegyzés

Az (1.10) egyenlet ismeretében alternatív úton is megkaphatjuk az ideális v sebességet. Ehhez először is végezzük el az alábbi azonos átalakítást a munkára vonatkozóan:

$$W = \frac{2kd(v^2 - c^2 + c^2)^2}{v^2 - c^2} = 2kd\left[2c^2 + (v^2 - c^2) + \left(\frac{c^4}{v^2 - c^2}\right)\right].$$

A zárójelben lévő összeg első tagja független a v sebességtől, a második kettő pedig alulról becsülhető a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség segítségével:

$$(v^2 - c^2) + \left(\frac{c^4}{v^2 - c^2}\right) \geq 2c^2.$$

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha a két tag megegyezik, amely feltétel rövid úton visszavezet az (1.13) végeredményre:

$$(v^2 - c^2)^2 = c^4 \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2c^2 \quad\Longrightarrow\quad v = \sqrt{2}c.$$

Az ehhez tartozó minimális munka értéke pedig:

$$W_{\min} = 8kdc^2.$$

2. feladat

(a)

Mivel a kő legurulását semmi sem akadályozza, így a helyzeti energiája alakul át mozgási energiává, mire leér a lejtő aljára. Az energiamegmaradást felírva:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2. \tag{2.1}$$

Innen kifejezhetjük v sebességet, amellyel elindul a vízszintes talajon:

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{2.2}$$

Az egyenes arányosság miatt a lejtő aljától y távolságban a kő és a talaj közötti csúszási súrlódási együttható:

$$\mu(y) = ky, \tag{2.3}$$

így itt a kőre ható eredő erő nagysága:

$$F = \mu(y)mg = kmg \cdot y. \tag{2.4}$$

Mivel az eredő erő nagysága egyenesen arányos a lejtő aljától mért távolsággal, iránya pedig mindig a lejtő felé mutat, így a szikla mozgása a vízszintes talajon harmonikusnak tekinthető a megállásig, melynek egyensúlyi állapota épp a lejtő aljánál van. A rezgőmozgás ω körfrekvenciája kifejezhető a (2.4) egyenletből:

$$\omega = \sqrt{kg}. \tag{2.5}$$

Ebből a periódusidő is megkapható:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{kg}}. \tag{2.6}$$

A test éppen negyedperiódusnyi idő után áll meg, hiszen ekkor lesz a sebessége nulla. A rezgés itt be is fejeződik, mivel a csúszási súrlódási erő megállás után már nem hat a testre. A lejtő aljának elérése és a megállás között eltelt idő így:

$$\boxed{t = \frac{\pi}{\sqrt{4kg}}}. \tag{2.7}$$

(b)

A megállásig eltelt negyedperiódusnyi idő alatt a test éppen egy amplitúdónyi, azaz A utat tesz meg. Az amplitúdó a maximális sebesség segítségével kifejezhető:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega}. \tag{2.8}$$

A maximális sebességet a test éppen a lejtő legalján veszi fel, értéke az energiamegmaradás törvénye alapján számítható:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \Longrightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2gh}. \tag{2.9}$$

A (2.5), (2.8) és (2.9) egyenletek segítségével végül megkaphatjuk a keresett utat, azaz az amplitúdót:

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2h}{k}}}. \tag{2.10}$$

3. feladat

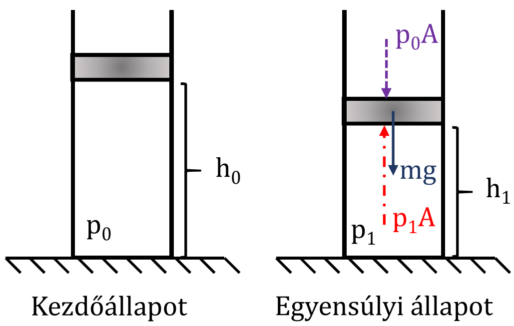
Induljunk ki a feladatban ismertetett elrendezésből, azaz a két kiterjedt, Q_1 illetve Q_2 töltésű gömbök esetéből. Gondolkodjunk az alábbi lépések mentén:

- A két gömb között ható erőt értelmezhetjük úgy, mint az első gömb által létrehozott elektromos mező hatása a második gömbre. Az első gömb elektromos mezeje, és így a keresett erő sem változik, ha a gömböt pontszerűvé zsugorítjuk.
- Ezt követően vegyük észre, hogy az erőre úgy is gondolhatunk, mint a második gömb elektromos mezejének hatása az első – immár pontszerű – testre.
- Ez viszont ismét változatlan, ha a második gömböt pontszerűvé zsugorítjuk.

Végső soron azt láthatjuk, hogy a keresett erő azonos két pontszerű töltés között ható erővel, amely a Coulomb-törvény szerint $F = kQ_1Q_2/r^2$ nagyságú.

4. feladat

A dugattyú sebessége akkor lesz maximális, ha gyorsulása zérus, azaz a rá ható erők eredője nulla. Az egyes erőket a 4.1. ábrán tüntettük fel.



4.1. ábra. A dugattyúra ható erők szemléltetése.

Felírva az egyensúly erőtani feltételét:

$$p_1 A = mg + p_0 A, \tag{4.1}$$

ebből a bezárt gáz nyomása a keresett állapotban:

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 109810\,\mathrm{Pa}. \tag{4.2}$$

Mivel a henger és a dugattyú is hőszigetelt, a gáz állapotváltozása adiabatikus. Ez alapján felírhatjuk a Poisson-egyenletet a kiinduló és egyensúlyi állapot között:

$$p_0 V_0^\kappa = p_1 V_1^\kappa, \tag{4.3}$$

ahol a κ fajhőhányados értéke – felhasználva, hogy a nitrogén kétatomos gáz, azaz szabadsági fokainak száma $f = 5$:

$$\kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5}. \tag{4.4}$$

A (4.3) alapján a bezárt gázoszlop magassága a keresett állapot elérésekor:

$$p_0 (Ah_0)^\kappa = p_1 (Ah_1)^\kappa, \tag{4.5}$$

egyszerűsítve és rendezve, valamint (4.2)-et felhasználva:

$$h_1 = \sqrt[\kappa]{\frac{p_0}{p_1}} \cdot h_0 = 1{,}871\,\mathrm{m}. \tag{4.6}$$

A dugattyú kérdezett sebességének meghatározásához írjuk fel a munkatételt a kiinduló és egyensúlyi állapot közötti folyamatra! A dugattyún végzett munka három tagból áll: a nehézségi erő W_g, a külső légnyomás $W_\text{lég}$ és a bezárt nitrogéngáz W_N járulékaiból. Mindezekkel a munkatétel:

$$W_\mathrm{g} + W_\text{lég} + W_\mathrm{N} = \Delta E_\mathrm{kin}. \tag{4.7}$$

A tétel jobb oldalát részletezve:

$$W_\mathrm{g} + W_\text{lég} + W_\mathrm{N} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{max}^2, \tag{4.8}$$

innen a keresett v_max sebesség kiszámítható:

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{2\left(W_\mathrm{g} + W_\text{lég} + W_\mathrm{N}\right)}{m}}. \tag{4.9}$$

A maximális sebesség számértékének meghatározásához elsőként számítsuk ki a nehézségi erő munkáját:

$$W_\mathrm{g} = mg\Delta h = mg\,(h_0 - h_1). \tag{4.10}$$

A h_1 magasság (4.6) egyenletben kiszámított értékét behelyettesítve:

$$W_\mathrm{g} = 63{,}4\ \mathrm{J}. \tag{4.11}$$

Hasonlóan a külső légkör által végzett munka is megkapható:

$$W_{\text{lég}} = p_0 A \Delta h = p_0 A \left(h_0 - h_1\right) = 646{,}6 \text{ J} \,. \tag{4.12}$$

Végül a bezárt gáz által végzett munka:

$$W_{\mathrm{N}} = -\Delta E_{\mathrm{b}} = -\frac{f}{2}\left(p_1 V_1 - p_0 V_0\right) = \frac{f}{2} A \left(p_0 h_0 - p_1 h_1\right) = -677{,}5 \text{ J} \,. \tag{4.13}$$

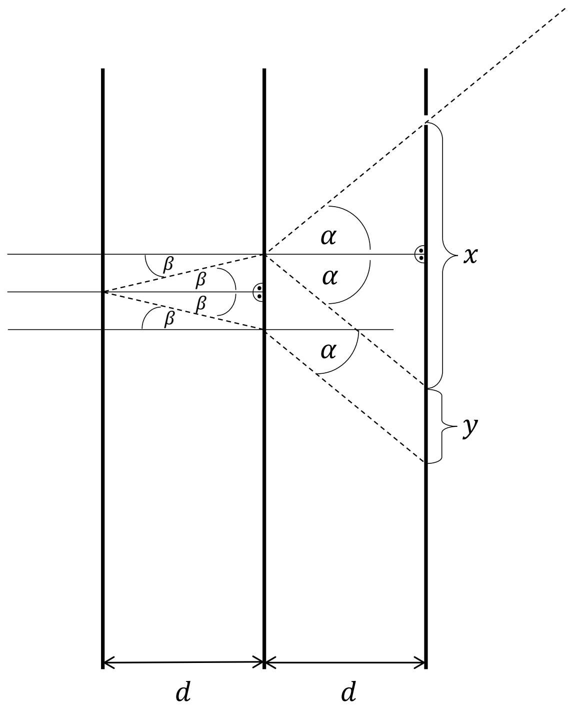
A (4.11), (4.12) és (4.13) számértékeket visszaírva a (4.9) egyenletbe adódik a végeredmény:

$$\boxed{v_{\max} \approx 1{,}14 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \,. \tag{4.14}$$

5. feladat

(a)

A feladatban vizsgált jelenséget a geometriai optika segítségével érthetjük meg. Ehhez első körben érdemes felvázolni a fénysugarak pályáit, ez látható az 5.1. ábrán.



5.1. ábra. A feladat geometriájának ábrázolása.

Miután a fény találkozik a külső üveglappal két dolog történik: visszaverődik és megtörik. A visszavert fénysugár – amelynek visszaverődési szöge megegyezik az α beesési szöggel – egy fényes pont formájában jelenik meg a redőnyön, ez lesz a középső pont. A fénysugár maradéka törést szenved el β törési szöggel, majd a második üveglaphoz érve szintén megtörik és visszaverődik. Utóbbi része a külső üveglaphoz érve újból megtörik, a törési szög ekkor éppen α lesz az 5.1. ábra geometriájának megfelelően. Ez pedig azt jeleni, hogy a megtört fénysugár párhuzamos lesz azzal, ami rögtön visszaverődött az első üveglapról, és végül ez okozza a legalsó fényes pontot. Összességében tehát a törések és visszaverődések sorozata mindkét fényes pont megjelenését magyarázza.

(b)

A beesési merőlegeseket a 5.1. ábrán behúzva derékszögű háromszögek jönnek létre, ahogy az ábra is mutatja, ezekben pedig a megfelelő szögfüggvényekkel felírhatók az alábbi összefüggések:

$$2d \operatorname{tg} \alpha = x, \tag{5.1}$$

valamint kihasználva, hogy az α szögben haladó fénysugarak alkotta paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak:

$$2d \operatorname{tg} \beta = y. \tag{5.2}$$

Az (5.1) egyenletből a d vastagság kifejezhető:

$$d = \frac{x}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}. \tag{5.3}$$

Megjegyzendő, hogy ez megkapható úgy is, ha kihasználjuk, hogy $\alpha = 30°$ miatt szabályos háromszög keletkezik, melynek minden oldala x hosszú, magassága pedig éppen d. Bármely módon is járunk el, a két üveglap közti d távolság végül:

$$\boxed{d = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\mathrm{cm} \approx 1{,}3\,\mathrm{cm}}. \tag{5.4}$$

(c)

Az (5.2) egyenletből d ismeretében kifejezhető a β törési szög:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2d}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}\right) = 21{,}05°. \tag{5.5}$$

Végül a két üveglap közti n törésmutatót is megkaphatjuk a $\sin\alpha = n \sin\beta$ Snellius–Descartes-törvény felhasználásával:

$$\boxed{n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}39}. \tag{5.6}$$