



1. feladat

Ha egyetlen vízcseppét helyeznénk az ereszebe v_0 kezdősebességgel, akkor az az eresz keresztmetszeti síkjában ingamozgást végezne, miközben arra merőlegesen állandó sebességgel halad. Azonban a feladatban több részecske kollektív mozgását kell vizsgálnunk, így a helyzet bonyolultabb, további megfontolásokra van szükség.

Belátható, hogy két azonos tömegű tömegpont tökéletesen rugalmas ütközésekor sebességük megcserélődik. Ezáltal – mivel minden részecske teljesen egyforma – az ütközés éppen olyan, mintha a két részecske „átmenne egymáson”. Mindez azt eredményezi, hogy a fókusz távolságokra kapható eredmény nem változik akkor, ha egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk a részecskék ütközését.

A feladatban rögzített $\varphi \ll 1$ feltétel következményeképp az ingamozgás közelítőleg egy $\omega = \sqrt{g/R}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgással azonos. Ekkor az ereszből a φ szög által kivágott hengerszeletet tekinthetjük síknak, és a sík középvonalától kezdetben x_0 távolságra lévő részecske pályájának koordinátái:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right), \quad (1.1a)$$

$$y(t) = v_0 t. \quad (1.1b)$$

Fókuszpontok olyan t_n időpontok esetén jelennek meg, amikor $x(t_n)$ értéke független az x_0 amplitúdótól. Ez egyedül akkor lehetséges, amikor az (1.1a) egyenletben szereplő koszinuszfüggvénynek zérushelye van:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t_n\right) = 0 \quad \implies \quad t_n = \sqrt{\frac{R}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad (1.2)$$

ahol $n \in \mathbb{N}$. Ezekhez az időpontokhoz tartozó fókuszpontok végül az (1.1b) egyenletbe való behelyettesítéssel kaphatóak:

$$f_n = y(t_n) = \frac{v_0 \pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} (2n + 1). \quad (1.3)$$

2. feladat

(a)

A feladatban leírt feltétel teljesüléséhez az eltárolt m víztömeg E_{helyzeti} helyzeti energiájának meg kell egyeznie a napi áramszükséglet E_{nap} energiájával:

$$E_{\text{helyzeti}} = E_{\text{nap}} = \frac{2523 \text{ kWh}}{365} = 24,88 \text{ MJ}. \quad (2.1)$$

Felhasználva, hogy a helyzeti energia $E_{\text{helyzeti}} = mgh$ alakban áll elő, a (2.1) egyenletből kifejezhető a szükséges víztömeg:

$$m = \frac{E_{\text{nap}}}{gh} = 423 \text{ t}. \quad (2.2)$$



(b)

Ideális turbina esetén a víz helyzeti energiája árammá és az alsó tartályba kifolyó víz kinetikus energiájává alakul. Egyenlettel kifejezve:

$$E_{\text{helyzeti}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{áram}} \implies E_{\text{áram}} = mgh - \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.3)$$

Ebből pedig kifejezhető az erőmű hatásfoka:

$$\eta(v) = \frac{E_{\text{áram}}}{E_{\text{helyzeti}}} = 1 - \frac{v^2}{2gh}. \quad (2.4)$$

Az áram teljesítményének kiszámításához a (2.3) egyenlet mellett még tudnunk kell, hogy az m tömegű víz mennyi idő alatt folyik ki a rendszerből. Ehhez elképzelhetjük, hogy az m tömegű víz az A keresztmetszetű csőben $L = m/(\rho A)$ hosszúságot foglal el, ahol ρ a víz sűrűsége. Ezen L hosszúságú szakasz kifolyásához $t = L/v = m/(\rho Av)$ idő szükséges. Mindezt összeírva a leadott teljesítményre az alábbi kifejezést kapjuk:

$$P(v) = \frac{E_{\text{áram}}}{t} = \rho ghAv - \frac{\rho A}{2}v^3. \quad (2.5)$$

(c)

Végül a (2.5) egyenletben kapott P függvény v szerinti maximumát kellett meghatározni. A maximumhely szükséges, de nem elégséges feltétele, hogy ott a függvény deriváltja eltűnjön:

$$P'(v^*) = \rho ghA - \frac{3\rho A}{2}(v^*)^2 = 0 \implies v^* = \sqrt{\frac{2gh}{3}}, \quad (2.6)$$

ahol felhasználtuk, hogy az adott fizikai szituációban csak a pozitív sebességek értelmezhetőek. Mivel a $v = 0$ illetve $v = \sqrt{2gh}$ helyeken $P(v) = 0$, a kettő között pedig $P(v) > 0$, a fent talált v^* hely valóban maximumhelye a P függvénynek. A kapott értéket a (2.5) egyenletbe behelyettesítve kiszámítható a maximális teljesítmény:

$$P(v^*) = \rho A \left(\frac{2gh}{3} \right)^{3/2}. \quad (2.7)$$

Az ehhez tartozó hatásfok pedig a (2.5) összefüggés szerint:

$$\eta(v^*) = \frac{2}{3}. \quad (2.8)$$

A végeredményből az is kiolvasható, hogy Dürer napi energiaigényének fedezéséhez még a legjobb esetben is a (2.2) egyenletben számolt víztömeg másfélszerese szükséges.



3. feladat

Amíg a mécsesről még nem vettük le annak tetejét, addig nem ismerjük a tetőben kialakult helytől és időtől függő T hőmérséklet-eloszlást. Éppen ezért általános eloszlás esetén kell tárgyalnunk a problémát. A tető nagyon vékony, ezért kezelhetjük kétdimenziós testként, azaz feltételezhetjük, hogy a tető egész vastagságán át állandó a hőmérséklet értéke.

Tekintsük azon időintervallumot, amikor a tetőt még nem vettük le a mécsesről. Ekkor annak a környezethez képesti többlet-hőenergiája a következőképp adható meg:

$$Q(t) = c\rho\delta \int_A [T(\mathbf{r}, t) - T_0] dA = c\rho\delta \cdot \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_A [T(\mathbf{r}, t) - T_0] \Delta A, \quad (3.1)$$

ahol az integrálás a tető felületére történik. A tetőből kiáramló teljes hőenergia pedig:

$$\dot{Q}(t) = -2\alpha \int_A [T(\mathbf{r}, t) - T_0] dA = -2\alpha \cdot \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_A [T(\mathbf{r}, t) - T_0] \Delta A, \quad (3.2)$$

ahol a kettős faktor amiatt van, hogy hőleadás a tető felületének mindkét oldalán egyaránt történik. A (3.1) és (3.2) egyenleteket felhasználva Q változására az alábbi differenciálegyenlet írható fel:

$$\dot{Q} = -\frac{2\alpha}{c\rho\delta} Q \quad (3.3)$$

Ennek általános megoldása jól ismert (bomlásegyenlet néven szerepel többek között a *Deriválás fizikus szemmel* segédletben is):

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{2\alpha}{c\rho\delta} t\right), \quad (3.4)$$

ahol Q_0 a mécsesetető kezdeti hőenergiája.

A fenti egyenletek addig érvényesek, míg le nem vettük a tetőt a mécsesről. Miután ezt megtettük, és a tetőt hőszigetelő edénybe helyeztük, a benne lévő hőenergia már időben állandó és csak a belső hőmérséklet-eloszlás változhat. Kellően hosszú idő elteltével az egész tető hőmérséklete homogén lesz, azaz $T(\mathbf{r}, \infty) = T_{\text{egyensúlyi}}$. Ekkor:

$$Q(\infty) = c\rho\delta A(T_{\text{egyensúlyi}} - T_0). \quad (3.5)$$

A feladat szövege alapján t_0 időt várva a gyertya elalvása után, és akkor levéve a mécses tetejét az egyensúlyi hőmérséklet T_2 lesz. A $Q(t_0) = Q(\infty)$ feltételt a (3.4) és (3.5) egyenletek felhasználásával felírva a Q_0 hőmennyiség kifejezhető:

$$Q_0 = c\rho\delta A(T_2 - T_0) \exp\left(\frac{2\alpha}{c\rho\delta} t_0\right). \quad (3.6)$$

Ha a mécses tetejét egyből levesszük a gyertya elalvása után, akkor hasonló indoklás nyomán a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$Q_0 = c\rho\delta A(T_1 - T_0). \quad (3.7)$$

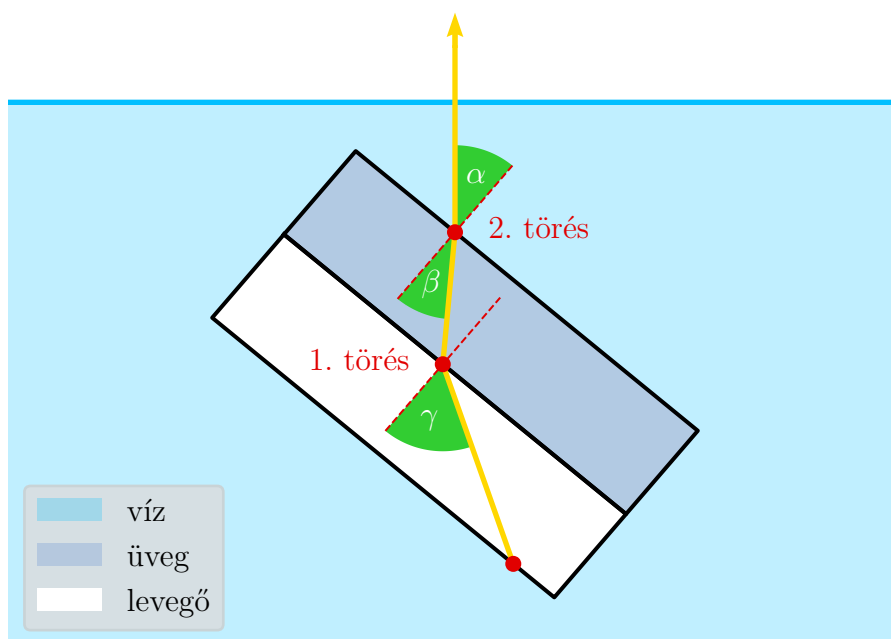
Végül a (3.6) és (3.7) kifejezéseket összevetve a keresett T_1 hőmérséklet az alábbi alakot ölti:

$$\boxed{T_1 = T_0 + (T_2 - T_0) \exp\left(\frac{2\alpha}{c\rho\delta} t_0\right)}. \quad (3.8)$$



4. feladat

A feladatban vizsgált jelenséget a geometriai optika segítségével érthetjük meg. Ehhez első körben érdemes felvázolni a fénysugarak pályáit, ez látható a 4.1. ábrán.



4.1. ábra. A releváns sugármenetek ábrázolása.

Ahogy látható, a kulsgondolat az, hogy számlapos óra esetében az óraüveg alatt levegő található, így két fénytörés is fellép: a víz-üveg közegethatáron illetve az üveg-levegő közegethatáron. Előbbi esetben a Snellius–Descartes-törvény a következőképp írható:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_{\text{üveg}}}{n_{\text{víz}}}, \quad (4.1)$$

ahol α a beesési és β a törési szög. A második esetben hasonlóan:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n_{\text{üveg}}}, \quad (4.2)$$

ahol β a beesési és γ a törési szög. A (4.1) és (4.2) egyenleteket a következőképp is összefoglalhatjuk:

$$n_{\text{víz}} \sin \alpha = n_{\text{üveg}} \sin \beta = \sin \gamma. \quad (4.3)$$

Az óra számlapja, akkor tűnik el, amikor teljes visszaverődés történik, azaz $\gamma = 90^\circ$. Ebben az esetben a keresett α szög értéke az alábbi:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{1}{n_{\text{víz}}} \right) = 48,6^\circ. \quad (4.4)$$



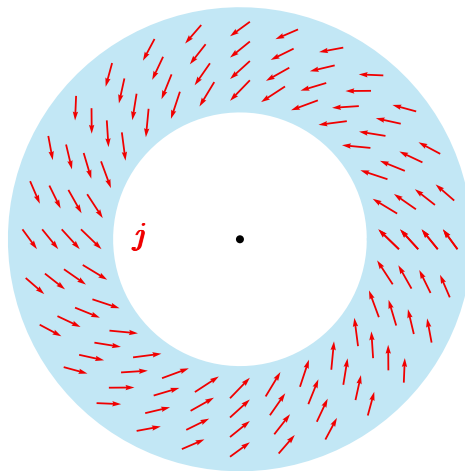
5. feladat

A Faraday-féle indukciótörvény értelmében a körvezetőben indukált U feszültséget az általa közrezárt indukcióvonalak számának, vagyis a Φ mágneses fluxusnak az időderiváltja határozza meg. A pillanatnyi feszültség egy adott t időpontban:

$$U(t) = -\dot{\Phi}(t), \quad (5.1)$$

a mért effektív feszültség pedig ezen U négyzetes időátlaga.

A feladatban kissé kacifántos úton felvázolt kérdés tehát az, miként függ a Φ fluxus a toroidtekercs menetszámától. Ennek megválaszolásához először is vegyük észre, hogy a körvezető hengerszimmetriájából fakadóan a fluxus nem változik, ha a toroidtekercset tetszőleges szöggel elforgatjuk saját tengelye körül. Ezt felhasználva a tekercsre csévélte vékony huzalban folyó áramot egyenletesen szétkenhetjük a tórusz felületén, és a fluxus eközben továbbra sem változik. Az így kapott elrendezést mutatja sematikusán az 5.1. ábra. A jobb átláthatóság kedvéért az ábrán a relatíve kis menetszámú $N = 3$ esetet tüntettük fel.



5.1. ábra. A tórusz felületén szétkent \mathbf{j} árameloszlás felülnézetből $N = 3$ esetén.

Vegyük észre, hogy a szétkent toroid elrendezése megkapható két egyszerűbb árameloszlás szuperpozíciójaként, amelyeket az 5.2. ábra illusztrál. Az egyiknél az áramvonalak a tórusz R_1 sugarú középkörével párhuzamosan, a másiknál pedig arra merőlegesen futnak; ezeket rendre *toroidális* és *poloidális* komponensnek nevezhetjük. A poloidális áramsűrűség $j_{\text{pol}} = |\mathbf{j}_{\text{pol}}|$ nagysága a hengerszimmetria alapján azonnal felírható a tengelytől r távolságbán:

$$j_{\text{pol}}(r) = \frac{NI}{2\pi r}. \quad (5.2)$$

A toroidális komponens is megkapható, ha felhasználjuk, hogy az áramvonalak iránya az eredeti tekercs meneteivel párhuzamos. Jelölje φ a tórusz tengelytől mért polárszöget, ϑ pedig a tórusz



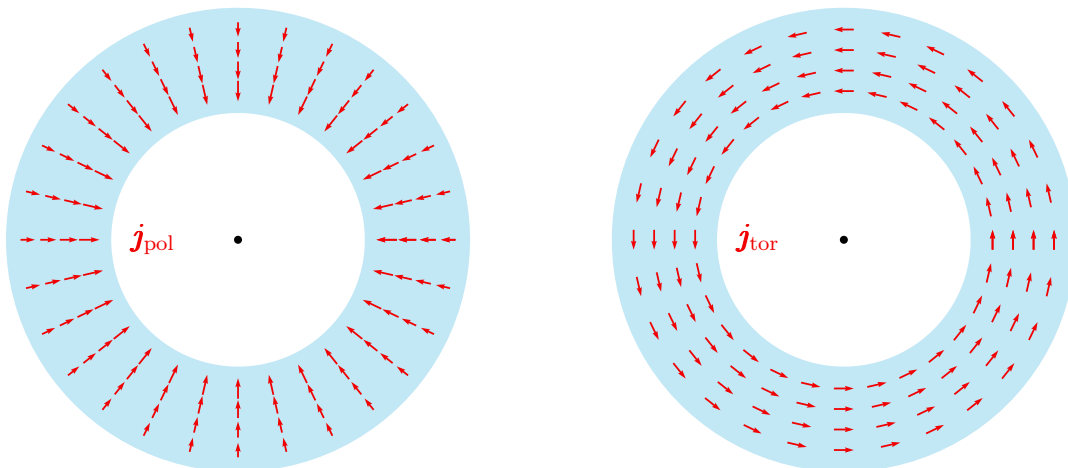
középköre körüli csavarodás szögét. Ekkor az áramsűrűség-komponensek aránya megegyezik egy kicsiny huzaldarab $R_2\Delta\vartheta$ poloidális és $r\Delta\varphi$ toroidális vetületeinek arányával:

$$\frac{j_{\text{pol}}(r)}{j_{\text{tor}}(r)} = \frac{R_2\Delta\vartheta}{r\Delta\varphi} = \frac{NR_2}{r}. \quad (5.3)$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $\Delta\vartheta/\Delta\varphi = (2N\pi)/2\pi = N$ az egyenletes menetemelkedés miatt. Az (5.2) és (5.3) egyenleteket összevetve a toroidális áramsűrűség $j_{\text{tor}} = |\mathbf{j}_{\text{tor}}|$ nagyságára az alábbi eredmény adódik:

$$j_{\text{tor}}(r) = \frac{I}{2\pi R_2}, \quad (5.4)$$

amely független a helytől és a menetszámtól is.



5.2. ábra. Poloidális \mathbf{j}_{pol} és toroidális \mathbf{j}_{tor} árameloszlások felülnézetből $N = 3$ esetén.

A poloidális komponens mágneses mezeje nem ad járulékot a körvezető fluxusába, ugyanis indukcióvonalainak nem lehet a tórusz tengelyével párhuzamos komponense. Ez az árameloszlás síktükrözési szimmetriájából következik, legegyszerűbben a Biot–Savart-törvényben megjelenő jobbkézzsabály segítségével látható be, de igazolható akár a mágneses indukció axiálvektor mivoltát felhasználva is.

A toroidális komponens már adhat járulékot a fluxusba, és általános esetben ad is, ez határozza meg tehát a voltmérő által mutatott értéket. Mivel az áramsűrűség teljes mértékben független a menetszámtól, így láthatjuk, hogy a mért effektív feszültség sem változhat e paraméter hangolása által. Érdeemes észrevenni továbbá, hogy a számolás során sehol nem használtunk fel semmilyen közelítést az R_1 , R_2 , R_3 sugarak viszonyaira vonatkozóan, vagyis a kapott eredmény teljes mértékben általános, az elrendezés szimmetriáinak következménye.

Megjegyzés

A megoldás során felhasznált állítás, miszerint síktükrözésre szimmetrikus árameloszlás mágneses mezeje a tükrősík pontjaiban arra merőleges, általánosan belátható az alábbi egy-



szerű gondolatmenet szerint.

Vezessünk be descartes-i koordinátázást oly módon, hogy annak origója a vizsgálni kívánt pont legyen, a tükörsíkba eső tengelyeket x illetve y , az arra merőleges tengelyt pedig z jelölje. A síktükörözés eredményeképpen bármely \mathbf{r} helyvektorhoz tartozik egy \mathbf{r}^* tükörkép, amelyeket az alábbi komponensek jellemeznek:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{r}^* &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y - z\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Az \mathbf{r} illetve \mathbf{r}^* helyeken az áramsűrűség értéke szintén komponensekkel kifejezve:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\mathbf{r}) &= j_x\mathbf{e}_x + j_y\mathbf{e}_y + j_z\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}^*) &= j_x\mathbf{e}_x + j_y\mathbf{e}_y - j_z\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Ezek együttes járuléka az origóbeli mágneses indukcióvektorhoz a Biot–Savart-törvény alapján:

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0\Delta A}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}^*) \times \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r}^*|^3} \right) = \frac{\mu_0\Delta A}{4\pi} \frac{j_x y - j_y x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z,$$

amely láthatóan z irányú, azaz a tükörsíkra merőleges. A fenti gondolatmenet megismételhető a tükörsík egyik oldalán fellelhető összes áramelem esetére, végső soron igazolva a vizsgált állítást.