



A megoldás ismertetése előtt fontos megjegyezni, hogy az alábbiak során vizsgált minta a versenyen használttól némiképp eltérő, adatai: $M = [30 \pm 0,5]$ g, $a = [160 \pm 0,5]$ mm illetve $b = [100 \pm 0,5]$ mm. Mindezek ellenére az elvi lépések és a megoldás menete teljes mértékben megegyezik a versenyen elvártakkal.

Elméleti feladatok

1. feladat

A lengésidő formulájában az elméleti bevezetőben leírtaknak megfelelően a felfüggesztési tengelyre vonatkozó Θ_s tehetetlenségi nyomaték szerepel. Ez kapcsolatba hozható a tömegközépponti tehetetlenségi nyomatékkal a Steiner-tétel által:

$$\Theta_s = \Theta_0 + Ms^2. \quad (1)$$

Visszahelyettesítve a lengésidő megadott formulájába:

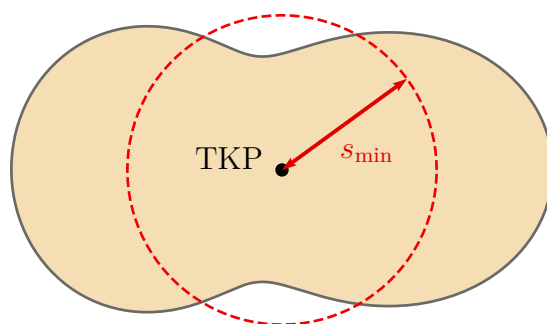
$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_s}{Mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{Mgs} + \frac{s}{g}}. \quad (2)$$

A gyök alatti kifejezés alulról becsülhető a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség segítségével:

$$\frac{\Theta_0}{Mgs} + \frac{s}{g} \geq \sqrt{\frac{4\Theta_0}{Mg^2}}. \quad (3)$$

Egyenlőség akkor lép fel, amikor a két tag megegyezik; ez a feltétel az alábbi speciális s_{\min} érték esetén teljesül:

$$s_{\min} = \sqrt{\frac{\Theta_0}{M}}. \quad (4)$$



1. ábra. A minimális lengésidőhöz tartozó s_{\min} sugarú kör ábrázolása.



Végül a becslés segítségével a minimális T_{\min} lengésidő is kiszámítható:

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4\Theta_0}{Mg^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2s_{\min}}{g}}. \quad (5)$$

Az eredmények tehát azt mutatják, hogy a lengésidő akkor minimális, ha a felfüggesztési tengely egy tömegközéppont körüli s_{\min} sugarú kör valamely pontján dőfi át a testet, ahogyan az 1. ábra is mutatja. Megjegyzendő, hogy ez a kör nem feltétlenül a test belsejében helyezkedik el.

2. feladat

A minta megadott adatait és a téglalap alakú, homogén tömegeloszlású kvázi-kétdimenziós test tömegközépponti tehetetlenségi nyomatékára vonatkozó formulát felhasználva becslést adhatunk a minta Θ_0 nyomatékára:

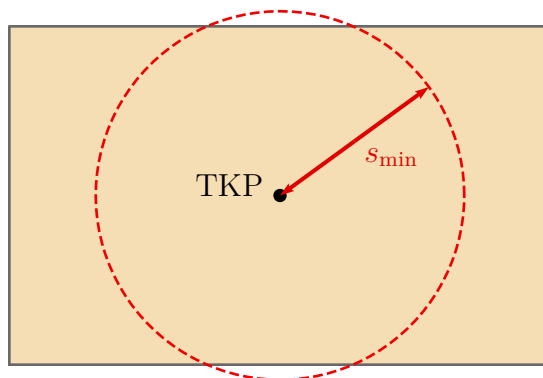
$$\Theta_0 = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = \frac{30 \text{ g}}{12} [(16 \text{ cm})^2 + (10 \text{ cm})^2] = 890 \text{ gcm}^2 = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2. \quad (6)$$

3. feladat

Az 1. feladatban levezetett (4) formula és a 2. feladatban kiszámított (6) érték segítségével a minimális lengésidőhöz tartozó s_{\min} sugár megkapható:

$$s_{\min} = \sqrt{\frac{\Theta_0}{M}} = \sqrt{\frac{890 \text{ gcm}^2}{30 \text{ g}}} = 5,45 \text{ cm}. \quad (7)$$

A fenti eredmény ismeretében a minimális lengésidő körét ábrázolhatjuk is, ezt mutatja a 2. ábra. Jól látható, hogy a kérdéses kör nem teljes egészében a minta területén belül húzódik: a hosszabb él mentén egy rövid szakaszon kilép belőle. Ez az eredmény lényeges következményeket von maga után a mérési feladatok szempontjából.



2. ábra. A minimális lengésidőhöz tartozó kör homogén téglalap esetén.



Mérési feladatok

4. feladat

A 3. feladat eredményeinek tekintetében érdemes a lengésidőket egy olyan egyenes mentén mérni, amely a minta a hosszú élével párhuzamos. Ekkor a választott egyenesnek biztosan lesz két metszéspontja az s_{\min} sugarú körrel. Érdemes továbbá kerülni a tömegközéppont közvetlen környezetét, mivel ott a lengésidő minden határon túl növekszik. Mindezek alapján a mérést a tömegközéppont és a minta széle között nagyjából félfúton húzódó egyenes mentén végeztük, első körben minden ötödik, n sorszámú lyuk esetén háromszor mérve tizenöt lengés idejét. A három mérés (T_1, T_2, T_3) átlagaként kapható T lengésidőt is kiszámítottuk, a továbbiakban ezt használjuk számítási alapként.

n	$15T_1$ [s]	$15T_2$ [s]	$15T_3$ [s]	T [s]
5	9,95	10,16	10,16	0,673
10	10,10	10,13	9,91	0,670
15	10,23	10,43	10,27	0,687
20	10,89	11,10	10,93	0,732
25	11,57	11,67	11,78	0,778
30	11,22	11,34	11,26	0,752
35	10,66	10,74	10,85	0,717
40	10,07	10,12	10,25	0,676
45	10,00	10,01	10,07	0,668
50	9,98	9,97	10,13	0,668
55	10,34	10,21	10,11	0,681

1. táblázat. Lengésidők (T_1, T_2, T_3, T) értékei a lyukak sorszáma (n) szerint rendezve.

A kapott eredményeket az 1. táblázat illetve a 3. ábra mutatják, utóbbi esetén már csak az átlagos lengésidőket feltüntetve. A grafikonon jelöltük a periódusidők abszolút hibáját is, mely oly módon becsülhető, hogy minden lyuk esetén mindhárom mért érték hibahatáron belül legyen: ekkor $\Delta T = 0,01$ s. Látható, hogy a lengésidő a lyukakon sorba haladva először monoton csökkenést mutat, a 5-10. lyuk körül eléri minimumát, majd növekedésnek indul, a 25. lyuk körül eléri maximumát, ezután újból csökkenni kezd, a 45-50. lyukak környékén eléri minimumát, végül ismét növekedni kezd. Az ábrán feltüntettünk egy függvényillesztéssel kapott elméleti görbét is a szemléletesség kedvéért, amely szintén jól mutatja az előbb leírt monotonitási viszonyokat; ezt természetesen a versenyzőktől nem vártuk el.



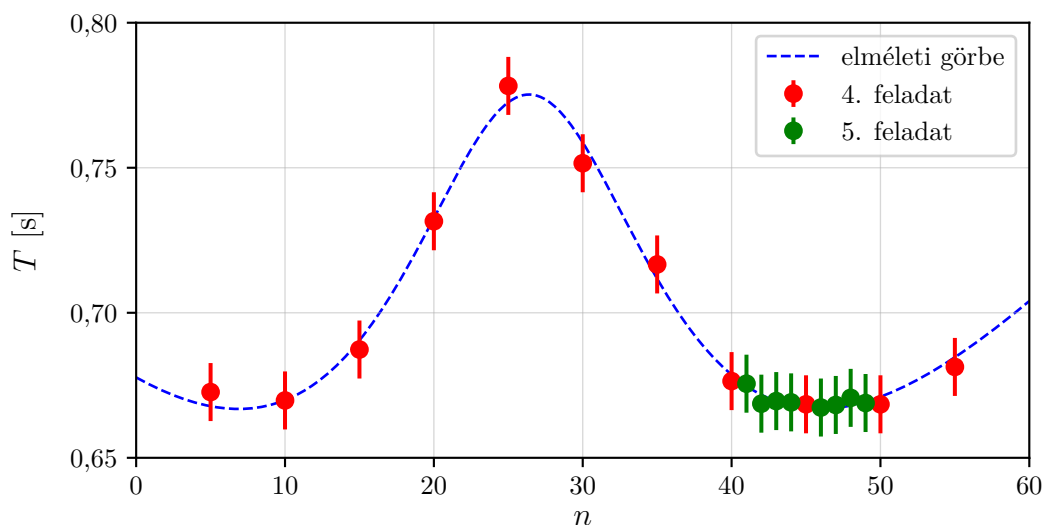
5. feladat

A 4. feladat eredményeit felhasználva újabb méréseket végeztünk a minimumra utaló 45-50. lyukak környezetében. Az eljárás az előzőekkel teljesen azonos volt, az eredményeket az 2. táblázat illetve a 3. ábra mutatják.

n	$15T_1$ [s]	$15T_2$ [s]	$15T_3$ [s]	T [s]
41	10,16	10,25	9,99	0,676
42	9,98	10,10	10,01	0,669
43	9,95	10,09	10,09	0,670
44	10,01	10,03	10,07	0,669
46	9,92	10,09	10,02	0,667
47	10,06	10,03	9,98	0,668
48	9,95	10,13	10,10	0,671
49	10,01	10,03	10,06	0,669

2. táblázat. Lengésidők (T_1 , T_2 , T_3 , T) értékei a lyukak sorszáma (n) szerint rendezve.

Látható, hogy az új mérési eredmények közel azonosak, megerősítve a minimum helyére vonatkozó gyanúkat. Hasonló eredményeket várnánk, ha az 5-10. lyukaknál megfigyelhető lokális minimum körül végeztünk volna további méréseket. A lengésidőre kapott újabb adatok lehetőséget biztosítanak a minimum értékének meghatározására, ezt tárgyalja a következő feladat.



3. ábra. A lengésidő (T) ábrázolása a lyukak sorszámának (n) függvényében.



6. feladat

Az 5. feladatban kapott T értékek átlagát képezve becsülhető a minimális periódusidő, annak bizonytalanságát pedig ismét választhatjuk úgy, hogy minden mért érték hibahatáron belül legyen:

$$T_{\min} = [0,670 \pm 0,006] \text{ s.} \quad (8)$$

Az (5) egyenletet átrendezve a periódusidő segítségével kifejezhető a tömegközépponti tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_0 = \frac{Mg^2}{64\pi^4} T_{\min}^4 = \frac{(30 \text{ g}) \cdot (981 \text{ cm/s}^2)^2 \cdot (0,670 \text{ s})^4}{64\pi^4} = 932 \text{ gcm}^2. \quad (9)$$

A tehetetlenségi nyomaték relatív hibája a hibaterjedés szabályai szerint a tömeg relatív hibájának és a periódusidő relatív hibája négyszeresének összege:

$$\delta\Theta_0 = \delta M + 4\delta T_{\min} = \frac{0,5 \text{ g}}{30 \text{ g}} + 4 \cdot \frac{0,006 \text{ s}}{0,670 \text{ s}} = 0,052 = 5,2\%. \quad (10)$$

A (9) és (10) eredmények alapján az abszolút hiba:

$$\Delta\Theta_0 = \Theta_0\delta\Theta_0 = (932 \text{ gcm}^2) \cdot (5,2\%) = 48 \text{ gcm}^2. \quad (11)$$

Összefoglalva a tömegközépponti tehetetlenségi nyomaték mért értéke:

$$\Theta_0 = [932 \pm 48] \text{ gcm}^2 = [9,32 \pm 0,48] \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2. \quad (12)$$

Ez hibahatáron belül megegyezik a 2. feladatban becsült Θ_0 értékkel, ahogyan az a (6) egyenlettel való összevetésből látszik. Ez arra utal, hogy a mintát borító kicsiny lyukak számottevően nem befolyásolják a tömegközépponti tehetetlenségi nyomatékot, a homogén eloszlású közelítés nagyjából helyes eredményt ad. Mindazonáltal a feladatban látott mérési eljárás erősen inhomogén sűrűségű, akár ismeretlen tömegeloszlású testek esetén is alkalmazható.