kategória

C

9-10. osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
VÁLTÓ
MEGOLDÓKULCS

C1. Reggel Benedek s Bence megevett egy rekesz egrest. Eme egresek negyedét ette meg Bence, felét s még hetet Benedek. Mely egész szem egres lehetett e rekeszben?

Megoldás: Jelölje a megevett egresek számát x. A feladat szövege alapján Benedek $\frac{x}{4}$ egrest evett meg, Benedek pedig $\frac{x}{2} + 7$-et. Tudjuk, hogy $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 7 = x$, ezt átrendezve: $7 = x - \frac{x}{4} - \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$, amiből pedig $x = 28$. Tehát 28 egrest ettek meg összesen.

C2. Egy évben december elseje szerdára esik. Sárának és Lilinek is van egy köcsögös düreres pólója, és elhatározták, hogy bizonyos napokon abban fognak iskolába menni. Sára minden harmadik hétköznapon megy benne, Lili pedig minden negyedik hétköznapon. Ha december 1-jén mindketten a düreres pólójukban mentek, legközelebb december hányadikán mennek mindketten ebben a pólójukban?

Megoldás: A decemberi hétköznapok naptárában azokat a napokat, amikor Sára megy düreres pólóban, vastag számmal jelöljük, amikor Lili, azokat dőlt számmal. Sára esetében elseje után a 3. hétköznap hétfő, vagyis hatodika. A következő 3. hétköznap csütörtök, vagyis kilencedike, és így tovább. Lili esetében hasonlóan adódnak a napok. Az így kapott naptárból látszik, hogy december 17-e lesz a legközelebbi alkalom, amikor mindketten düreres pólóban mennek iskolába.

Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
		1	2	3
6	*7*	8	**9**	10
13	**14**	15	16	***17***
20	21	**22**	*23*	24
27	28	*29*	**30**	31

C3. Öt barát, Lili, Dalma, Eszti, Balázs és Áron, magassági sorrendbe állnak. A magasságaik csökkenő sorrendben 173 cm, 171 cm, 166 cm, 165 cm és 162 cm. Mindenki a nála alacsonyabbakat és a saját szomszédait látja. Tudjuk, hogy:

- Áronnak csak egy szomszédja van.
- Balázs csak lányokat lát.
- Eszti a legmagasabb lány.
- Lili nem látja Dalmát.

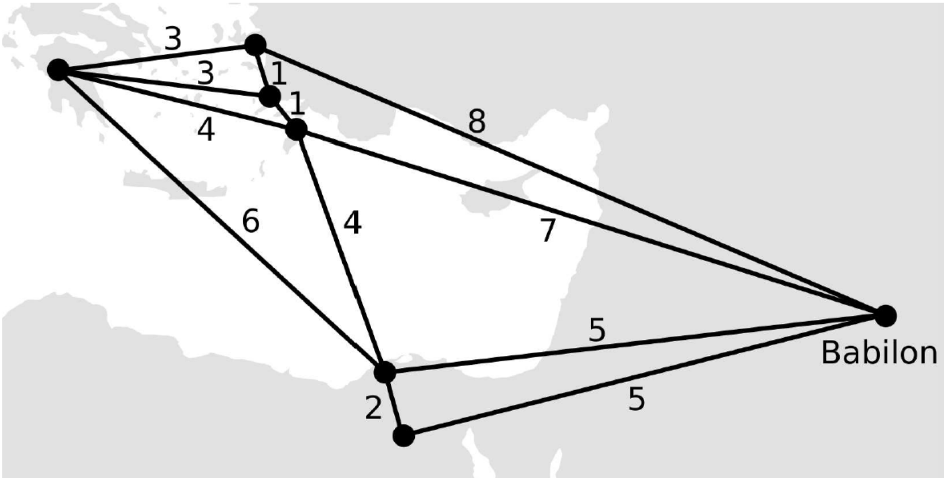
Hány centiméter különbség van Lili és Dalma magassága között?

Megoldás: Lili nem látja Dalmát, ezért Lili az alacsonyabb, és valakinek közöttük kell állnia. Ez az ember Eszti nem lehet, mert magasabb náluk. Áron sem lehet, mert neki csak egy szomszédja van. Tehát csak Balázs állhat közöttük. Mivel Áronnak csak egy szomszédja van és Balázs csak lányokat lát, ezért Áron a legmagasabb. A harmadik pont alapján Esztinél alacsonyabb Dalma és Lili. Balázs is, mert ő Dalmáék között áll. Ezek miatt a magassági sorrend legalacsonyabbtól legmagasabbig csak Lili, Balázs, Dalma, Eszti, Áron lehet, és ez a sorrend megfelel a feladat állításainak. Így Lili és Dalma magassága között 4 centiméter van.

C4. A számok használatának szigorításáról tárgyal négy, a matematikát nem kedvelő maja isten. Chaac ki nem állhatja a prímeket, így ő betiltaná a prímszámok használatát. Itzamna azokat a számokat nem szereti, amik felírhatók két páros szám szorzataként. Pawahtun a hárommal oszthatóakat tiltaná be. Yum Kaax pedig azon számokat nem szereti, amik felírhatók két különböző pozitív prímszám összegeként. Hány számot lehetne használni az $1, 2, ..., 20$ számok közül, ha mind a négy tiltás érvénybe lépne?

Megoldás: Ha Chaac tiltása érvénybe lép, akkor be lesz tiltva a 2, a 3, az 5, a 7, a 11, a 13, a 17 és a 19. Ha Pawahtun tiltása is érvénybe lép, akkor többé a 6-ot, a 9-et, a 12-t, a 15-öt és a 18-at sem lehet majd használni. Itzamna miatt ezeken kívül még a $4(= 2 \cdot 2)$, a $8(= 2 \cdot 4)$, a $16(= 2 \cdot 8)$ és a $20(= 2 \cdot 10)$ is be lennének tiltva. Mivel $7 + 3 = 10$ és $11 + 3 = 14$, Yum Kaax nem engedné többé ezeknek a számoknak a használatát sem. Az 1 használatát viszont egyikőjük sem tiltaná be. Tehát az 1, 2, ..., 20 számok közül mindössze 1-et lehetne használni a tiltások érvénybe lépése után.

C5. Hermész be szeretné járni a világ 7 csodáját úgy, hogy Babilonból indul és oda is érkezik vissza, közben pedig minden más csodát pontosan egyszer látogat meg. Az ábrán látható vonalakon utazhat, mindegyik annyi óráig tart, amennyi rá van írva. Legkevesebb hány óra alatt fejezheti be az útját? *A pöttyök a csodákat jelölik. Feltételezzük, hogy Hermész azonnal továbbindul minden csoda után.*

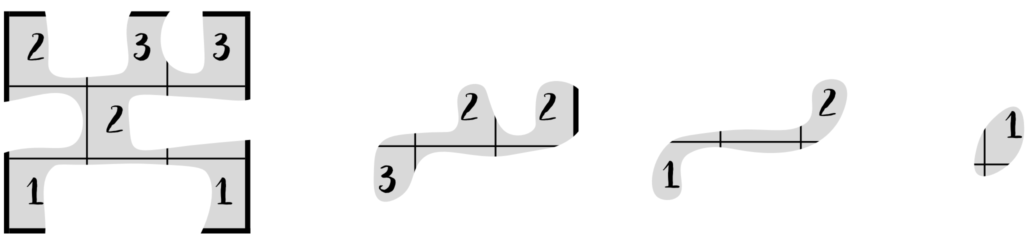


Megoldás: A legdélebbi (alsó) pontba csak két út megy, ezért Hermésznek ezt a két utat mindenképpen kell használnia. Ennélfogva a legkeletibb pontnál a 7-es és 8-as utak közül pontosan egyen megy. Ha a 7-esen megy, akkor csak úgy járhatja be a csúcsokat, hogy az 1-es éleken kétszer északra megy, majd a 3-ason és a 6-oson délre. Ezen út 25 óráig tart. Ha a 8-as utat használja, akkor háromféleképpen juthat el az második legdélebbi pontba, $3+3+1+4$, $1+3+4+4$ vagy $1+1+4+6$ órás utakon, de ezen esetekben az utak időtartama 26, 27 vagy 27 óra, tehát a legrövidebb út 25 óráig tart.

C6. Hány olyan kétjegyű szám van, mely osztható mindkét számjegyével?

Megoldás: Érdemes az első számjegy szerint keresni a számokat. Fontos megjegyezni, hogy a második szám nem lehet 0, mert semelyik szám sem osztható 0-val. Ezek alapján a megfelelő számok a 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 és a 99. Tehát összesen 14 megfelelő szám van.

C7. Lilla beírta egy 3×3-as négyzetrácsba a 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 számokat valamilyen sorrendben. Készített róla 4 fényképet, hogy ne felejtse el a kitöltést. Sajnos a négyzetrács elveszett, és a képek is megrongálódtak, csak az alábbi ábrán látható részletek maradtak belőlük. Mi volt az alsó sorba írt három szám összege?



Megoldás: Mivel az első kép tartalmazza az egész 3×3 táblázatot, egészítsük ki azt. A sorokat alulról felfelé, az oszlopokat balról jobbra növekedve számozzuk. A 2. képen két sor és három oszlop látható, ahol a 3. oszlopban a 2. számjegy 2. Mivel ezalatt a 2-es alatt van egy másik sor, így vagy a 3. vagy a 2. sorban lehet. A 3. sorban nem lehet, mert ott a 3. oszlop 2. számjegye 3. Így a következő táblázatot kapjuk:

2_	_3	_3
_ _	22	_2
13	_ _	_1

Láthatjuk, hogy a 13 és a 22 a helyére került. 3 db 3-ra végződő számunk van és a táblázatban mind a 3 db hármasvégződés szerepel. Tehát a legfelső sorba a két 3-as elé 2 és 3 fog jönni valamilyen sorrendben. A 4. képről az 1-es négyféle helyre kerülhet, a legfelső és a középső sor utolsó két oszlopába, az 1. helyiértékre. A legfelsőkre nem kerülhet, a középső sor 2. oszlopába sem, tehát csak a 3. oszlopba jöhet. Így megkaptuk a 12-t. A 3. kép elemeit ezek után egyértelműen el tudjuk helyezni, mert a 2-es nem jöhet az 1. és 2. sorba sem. Ezekből a következő ábrát kapjuk:

2_	33	23
1_	22	12
13	_ _	_1

Ebből látszik, hogy a 2-vel kezdődő számok mind szerepelnek a táblázatban (kizárásos alapon a 21 a bal felső sarokban van). A 3 db 1-gyel kezdődő szám is szerepel, a 11 a középső sorban az 1. oszlopban van. A kimaradt számok kerülnek az 1. sorba (ebben a sorrendben), a 32 és a 31. Tehát az alsó sorban a számok összege: $13 + 32 + 31 = 76$. A végső ábra:

21	33	23
11	22	12
13	32	31

C8. Timi 1999-ben született. Születése óta eddig hányszor fordult elő, hogy az aznapi dátumot le lehetett írni csak a 0, 1 és 2 számjegyek segítségével? *Például a 2022.02.21. ilyen dátum.*

Megoldás: A feladatnak megfelelő évszámok: 2000, 2001, 2002, 2010, 2011, 2012, 2020, 2021, 2022 (9 darab)
A megfelelő hónapok: 01, 02, 10, 11, 12 (5 darab)
A megfelelő napok: 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22 (8 darab)
Ezek közül akárhogy választunk egyet-egyet, megfelelő dátumot kapunk.
Összesen tehát $9 \cdot 5 \cdot 8 = 360$-szor fordult elő, hogy az aznapi dátumot le lehetett írni csak a 0, 1 és 2 számjegyek segítségével.

C9. Az $ABCD$ konvex négyszög AB oldala 18 cm hosszú. Az ABC és ABD háromszögek területe 63 cm^2, a BCD háromszög területe pedig 42 cm^2. Hány centiméter hosszú a CD oldal?

Megoldás: Az ABC és ABD háromszögek alapja azonos, és területük megegyezik, ezért abból, hogy a terület az alap és magasság szorzatának fele, a C csúcshoz tartozó magasság és a D csúcshoz tartozó magasság (a megfelelő háromszögekben) is 7 cm. Ez azt jelenti, hogy a négyszög egy trapéz, amelynek párhuzamos oldalai AB és CD, magassága pedig 7 cm. DCB területe 42 cm^2, ebből szintén a területképlet felhasználásával adódik, hogy $CD = 12$ cm.

C10. Zoli az alábbi 4×4-es táblázatot szeretné kitölteni az 1, 2, 3 és 4 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban, oszlopban, valamint a bal felső mezőtől a jobb alsóig haladó átlóban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Legfeljebb mennyi lehet a hat szürke mezőbe írt szám összege?

Megoldás: A megoldás 17.

4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

Egyik szám sem szerepelhet több mint kétszer a kijelölt mezőkön, mert akkor ilyen számot nem tudnánk az átlóba írni. Ezért az egyetlen lehetőség, amikor az összeg nagyobb lenne, mint 17, az az, amikor 2 db kettes, 2 db hármas és 2 db négyes kerül a kijelölt mezőkre. De ekkor ezen három szám közül valamelyik az átló középső két mezője közül valamelyikre kerül, és könnyen látható, hogy ebben az esetben nem tudunk négy darabot ebből a számból beírni, ezért ez az eset nem lehetséges.

C11. Egy téglalap átlója 14 cm hosszú, területe pedig 64 cm^2. Hány centiméter a téglalap kerülete?

Megoldás: Legyen a téglalap egyik oldala a cm, a másik pedig b cm. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, kerülete $K = 2(a+b)$, az átlója hosszának a négyzete pedig a Pitagorasz-tétel alapján $14^2 = a^2 + b^2$. Ekkor $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 14^2 + 2 \cdot T = 196 + 2 \cdot 64 = 324$. Tehát a centiméterben mért kerület felének a négyzete 324. Mivel egy alakzat kerülete csak pozitív lehet, emiatt a kerület fele 18 cm, tehát a téglalap kerülete 36 cm.

C12. Benedek leírta az alábbi számokat egy lapra: 1 db 1-est, 2 db 2-est, 3 db 3-ast, $\dots$, 50 db 50-est. Hány páros számjegyet írt le Benedek összesen?

Megoldás: Nézzük helyiértékek szerint a leírt számjegyeket! A tízes helyiértéken 2-est $20 + 21 + 22 + \dots + 29 = 245$-ször írt le, 4-est pedig $40 + 41 + \dots + 49 = 445$-ször.

Az egyes helyiértéken 0-t írt a 10-nél 10-szer, a 20-nál 20-szor, és így tovább, végül az 50-nél 50-szer. Ezért összesen $10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$-szer írt 0-t egyes helyiértéken. Ezt számoljuk meg a többi páros számjegyre is hasonlóan:

- 2-est $2 + 12 + 22 + 32 + 42 = 110$-szer írt,
- 4-est $4 + 14 + 24 + 34 + 44 = 120$-szor írt,
- 6-ost $6 + 16 + 26 + 36 + 46 = 130$-szor írt,
- 8-ast $8 + 18 + 28 + 38 + 48 = 140$-szer írt.

Tehát összesen $245 + 445 + 150 + 110 + 120 + 130 + 140 = 1340$ páros számjegyet írt le Benedek.

C13. A *bináris sudoku* egy olyan rejtvény, amiben úgy kell kitölteni egy táblázatot 0 és 1 számjegyekkel, hogy minden sorban és minden oszlopban ugyanannyi 0 legyen, mint 1, és ne legyen három cella egymás mellett egy sorban vagy egy oszlopban, melyben ugyanaz a számjegy szerepel. Az alábbi bináris sudoku feladványt megoldva mi lesz a két átlóban szereplő számjegyek összege?

							1
			0			1	1
	1						
1				0			1
				0	0		
						0	
			0				
				1		0	

Megoldás:

Ha a feladványban valahol egymás mellett lenne két azonos jegy vízszintesen vagy függőlegesen, akkor a két "végükre" csak a másik jegy kerülhet, mivel különben három azonos jegy lenne egymás után. Ugyanemiatt, ha van két azonos szám, melyek egy sorban vagy oszlopban vannak és van közöttük egy üres hely, akkor arra az üres helyre a másik jegy fog kerülni (lásd az ábrákat, a szürke háttérrel rendelkező cellák voltak ismertek, a fehérek, azok, amiket beírtunk).

1	0	0	1

1
0
1

Ezt a kétféle lépést alkalmazva és azt figyelembe véve, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 db 0 és 4 db 1 van, egyszerű kitölteni az ábrát ennyire:

				0			1
			0	1	0	1	1
	1			1			0
1				0			1
			1	0	0	1	
				1		0	
		1	0	0	1	1	0
				1		0	x

Vegyük észre, hogy ekkor az x-szel jelölt négyzetbe kizárólag 0 kerülhet, hiszen, ha 1-et írnánk oda, akkor az lenne a 4. az oszlopában, tehát az üres mezőkbe már 0 kerülne, ekkor viszont lenne 3 db 0 egymás fölött.

A jobb alsó sarokba 0-t írva és a korábbi észrevételeink segítségével, további számokat beírva idáig tudunk eljutni:

			1	0	1	0	1
y			0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
			1	0	0	1	0
		0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0
			0	1	1	0	0

Vegyük észre, hogyha az y-nal jelölt cellába 1-et írnánk, akkor az lenne a 4. a sorában és a megmaradó helyeket 0-kkal kitöltve lenne 3 db 0 egymás mellett, tehát abba a cellába kizárólag 0 kerülhet.

Ezt észrevéve ennyire tudjuk kitölteni az ábrát:

1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
	z		1	0	0	1	0
		0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0
			0	1	1	0	0

Ennél az állásnál, ha a z-vel jelölt cellába 0-t írnánk, akkor az oszlopába már nem kerülhetne több, így viszont 3 db 1 kerülne egymás alá. Tehát z helyére kizárólag 1 kerülhet.

Ezt beírva már ki tudjuk tölteni az egész ábrát a feladat elején leírt lépésekkel. A teljes kitöltés:

1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0

Tehát a végeredményben a két főátlóban szereplő számjegyek összege 5.

C14. Góliát az óriási kockás füzetébe szerkesztett egy 555 cm sugarú kört, aminek a középpontja éppen egy rácsnégyzet közepében van. Hány rácsnégyzetnek metsz bele a körvonal a belsejébe, ha a rácsnégyzetek oldalhossza 1 cm?

Megoldás: Elöször is igazoljuk, hogy a kör nem halad át rácsponton. Indirekten tegyük fel, hogy áthalad, ekkor léteznek olyan x, y egészek, melyekre a Pitagorász-tétel miatt $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 = 555^2$. A kifejezést 4-gyel felszorozva $4x^2+4x+4y^2+4y+2 = 555 \cdot 4$, ahol minden osztható 4-gyel, kivéve a 2, ami ellentmondás. Ha lentről fentre (jobb vagy bal oldalt) megyünk a kör vonalán, akkor 1110 darab vízszintes egyenesen haladunk át, hasonlóan balrol jobbra 1110 függőlegesen. Mivel a kör nem halad át rácsponton, minden alkalommal, amikor áthaladunk egy vízszintes vagy egy függőleges egyenesen, egy új négyzetbe lépünk és más-más négyzetekbe metszünk bele. Tehát a teljes kör megtételéhez 2220 darab függőleges és 2220 darab vízszintes egyenesen kell áthaladnunk. Így összesen 4440 darab négyzetbe metszünk bele.

C15. Andris elindult hazafelé az iskolából, de otthagyta az egyik füzetét. Anett utána akar szaladni vele. Az iskola kijáratától 3 egyenes út indul ki. Anett nem tudja, hogy Andris melyik irányba ment, de azt tudja, hogy végig egyenesen sétál 6 km/h sebességgel. Legkevesebb hány perc múlva tudja Anett biztosan utolérni Andrist, ha ő 12 km/h-val tud futni, 100 méterre lát az utcákon, és tudja, hogy Andris pontosan 5 perce indult?
Anett csak úgy tud áttérni egy másik útra, ha visszamegy az iskolához.

Megoldás: Andris 5 perc alatt $\frac{5}{60} \cdot 6 = \frac{1}{2}$ kilométert tesz meg, ezért Anett az iskolából már nem látja, melyik úton indult el. Mivel csak tippelni tud, ezért előfordulhat, hogy az első két tippje rossz lesz, és csak a harmadik úton találja meg. Tehát először meg kell győződnie, hogy az első két úton nincs ott, aztán a harmadikon utolérni.

Az első úton addig kell elfutnia, hogy Andris feltételezett pozíciójától 100 méterre legyen. Andris sebessége $6 \cdot \frac{1000}{60} = 100$ méter/perc, ezért t perc elteltével az iskolától $100 \cdot t$ méterre lesz. Anett ezzel szemben 200 méter/perc sebességgel megy, de 5 perccel később indul, ezért az első úton t perc elteltével $(t-5) \cdot 200$ métert halad. Akkor tud meggyőződni, hogy Andris nincs ott, ha már csak 100 méter van eközött a két szám között:

$$100t = (t-5) \cdot 200 + 100,$$

tehát $t = 9$ perc után. Ekkor visszafordulhat az iskola felé ugyanakkora sebességgel, visszaérnie is 4 percbe telik. Ekkor Andris már 13 perce sétál, tehát Andris a t időpontban $100t$ méter távolságra lehetne a 2. úton, míg Anett $(t-13) \cdot 200$-ra. Megint 100 méterre kell a feltételezett pozíciót megközelíteni:

$$100t = (t-13) \cdot 200 + 100,$$

tehát $t = 25$ perc után fordulhat vissza másodszorra. Ekkor $25 - 13 = 12$ perce futott ezen az úton, ezért $25 + 12 = 37$ perc után ér vissza az iskolához.

Ezután már biztosan jó úton megy, ezért most már csak utol kell érnie. Andris továbbra is $100t$ méterre van t időpontban, Anett pedig $(t-37) \cdot 200$-ra. Most teljesen utol kell érnie, ezért a találkozási időpont a

$$100t = (t-37) \cdot 200$$

egyenlet megoldása lesz, tehát $t = 74$ perc után. Viszont t azt fejezi ki, hogy hány perccel Andris indulása után éri utol őt Anett, emiatt, hogy megkapjuk, hogy ez hány perccel Anett indulása után volt, ki kell vonnunk t-ből 5-öt, tehát a megoldás $74 - 5 = 69$ perc.

C16. Odüsszeusz szeretne bepakolni 21 ládát a hajója 4 tárolójába, melyek 1-től 4-ig vannak számozva. Ahhoz, hogy a hajó súlyeloszlása jó legyen, a 2-es tárolóba legalább annyi ládának kell kerülnie, mint az 1-esbe, és a 3-as tárolóba legalább annyinak, mint a 4-esbe. Hányféleképpen tudja elhelyezni a ládákat, ha minden tárolóba legalább egyet tesz? *A ládák nincsenek megkülönböztetve, és egy tárolóba akármennyi láda belefér.*

Megoldás: Nézzük meg, hogy hányféleképpen tudunk ládát rakni az első két rekeszbe, ha ide összesen k doboz kerül. Ekkor ez $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, mivel a kisebb rekeszbe 1-től $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ ládát lehet rakni. Hasonlóan ez lesz igaz az utolsó két tárolóra is. Ekkor feloszthatjuk az eseteket aszerint, hogy mennyi doboz kerül az első két helyre és mennyi az utolsó két helyre. Ha előre 2, hátra 19, akkor az $1 \cdot 9$ eset lesz, ha 3 előre és 18 hátra, akkor $1 \cdot 9$, és így tovább. Ez összesen $1 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 330$.