kategória

D

9-12.
osztályosok

XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
VÁLTÓ
MEGOLDÓKULCS

D1. Reggel Benedek s Bence megevett egy rekesz egrest. Eme egresek negyedét ette meg Bence, felét s még hetet Benedek. Mely egész szem egres lehetett e rekeszben?

Megoldás: Jelölje a megevett egresek számát x. A feladat szövege alapján Benedek $\frac{x}{4}$ egrest evett meg, Benedek pedig $\frac{x}{2}+7$-et. Tudjuk, hogy $\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+7=x$, ezt átrendezve: $7=x-\frac{x}{4}-\frac{x}{2}=\frac{x}{4}$, amiből pedig $x=28$. Tehát 28 egrest ettek meg összesen.

D2. A számok használatának szigorításáról tárgyal négy, a matematikát nem kedvelő maja isten. Chaac ki nem állhatja a prímeket, így ő betiltaná a prímszámok használatát. Itzamna azokat a számokat nem szereti, amik felírhatók két páros szám szorzataként. Pawahtun a hárommal oszthatóakat tiltaná be. Yum Kaax pedig azon számokat nem szereti, amik felírhatók két különböző pozitív prímszám összegeként. Hány számot lehetne használni az $1, 2, ..., 20$ számok közül, ha mind a négy tiltás érvénybe lépne?

Megoldás: Ha Chaac tiltása érvénybe lép, akkor be lesz tiltva a 2, a 3, az 5, a 7, a 11, a 13, a 17 és a 19. Ha Pawahtun tiltása is érvénybe lép, akkor többé a 6-ot, a 9-et, a 12-t, a 15-öt és a 18-at sem lehet majd használni. Itzamna miatt ezeken kívül még a $4(=2\cdot 2)$, a $8(=2\cdot 4)$, a $16(=2\cdot 8)$ és a $20(=2\cdot 10)$ is be lennének tiltva. Mivel $7+3=10$ és $11+3=14$, Yum Kaax nem engedné többé ezeknek a számoknak a használatát sem. Az 1 használatát viszont egyikőjük sem tiltaná be. Tehát az 1, 2, ..., 20 számok közül mindössze 1-et lehetne használni a tiltások érvénybe lépése után.

D3. Öt barát, Lili, Dalma, Eszti, Balázs és Áron, magassági sorrendbe állnak. A magasságaik csökkenő sorrendben 173 cm, 171 cm, 166 cm, 165 cm és 162 cm. Mindenki a nála alacsonyabbakat és a saját szomszédait látja. Tudjuk, hogy:

- Áronnak csak egy szomszédja van.
- Balázs csak lányokat lát.
- Eszti a legmagasabb lány.
- Lili nem látja Dalmát.

Hány centiméter különbség van Lili és Dalma magassága között?

Megoldás: Lili nem látja Dalmát, ezért Lili az alacsonyabb, és valakinek közöttük kell állnia. Ez az ember Eszti nem lehet, mert magasabb náluk. Áron sem lehet, mert neki csak egy szomszédja van. Tehát csak Balázs állhat közöttük. Mivel Áronnak csak egy szomszédja van és Balázs csak lányokat lát, ezért Áron a legmagasabb. A harmadik pont alapján Esztinél alacsonyabb Dalma és Lili. Balázs is, mert ő Dalmáék között áll. Ezek miatt a magassági sorrend legalacsonyabbtól legmagasabbig csak Lili, Balázs, Dalma, Eszti, Áron lehet, és ez a sorrend megfelel a feladat állításainak. Így Lili és Dalma magassága között 4 centiméter van.

D4. Odüsszeusz szeretne bepakolni 7 ládát a hajója 4 tárolójába, melyek 1-től 4-ig vannak számozva. Ahhoz, hogy a hajó súlyeloszlása jó legyen, a 2-es tárolóba legalább annyi ládának kell kerülnie, mint az 1-esbe, és a 3-as tárolóba legalább annyinak, mint a 4-esbe. Hányféleképpen tudja elhelyezni a ládákat, ha minden tárolóba legalább egyet tesz? *A ládák nincsenek megkülönböztetve, és egy tárolóba akármennyi láda belefér.*

Megoldás: Nevezzük a 2. és 3. tárolókat középsőnek, az 1. és a 4. tárolókat külsőnek. Mivel minden tárolóba legalább egy láda kerül, ezért elég megnézni, hogy a maradék 3 ládát hányféleképpen tudjuk elhelyezni a szabályoknak megfelelően. A lehetséges esetek:

- Mindhárom láda egy tárolóba kerül: Ekkor ez csak az egyik középső tároló lehet. $\Longrightarrow$ 2 eset
- Két láda ugyanabba a tárolóba kerül, a harmadik egy másikba: A két láda valamelyik középső tárolóba kerülhet. Az utolsó ládát így vagy az ezzel szomszédos külső, vagy a másik középső tárolóba teheti. $\Longrightarrow$ $2\cdot 2=4$ eset
- Mindhárom láda külön-külön tárolóba kerül: Csak valamelyik külső tároló maradhat ki. $\Longrightarrow$ 2 eset

Így összesen 8 különböző módon tudja Odüsszeusz elhelyezni a ládákat.

D5. Melyik a legnagyobb olyan négyjegyű szám, mely osztható mind a négy számjegyével, és számjegyei mind különbözőek?

Megoldás: Mivel a megfejtés csupa különböző számjegyből áll, legfeljebb 9876 lehet. Ha a megfejtés legalább 9000, akkor biztosan osztható 9-cel, szóval vizsgáljuk a 9876-nál kisebb 9-cel osztható számokat. A 9873 nem osztható 8-cal, szóval nem teljesíti a feladat feltételeit. A 9864 viszont osztható 9-cel, 8-cal, 6-tal és 4-gyel is, tehát ez a legnagyobb olyan négyjegyű szám, mely eleget tesz a feladat feltételeinek.

D6. Az $ABCD$ konvex négyszög AB oldala 18 cm hosszú. Az ABC és ABD háromszögek területe 63 cm^2, a BCD háromszög területe pedig 42 cm^2. Hány centiméter hosszú a CD oldal?

Megoldás: Az ABC és ABD háromszögek alapja azonos, és területük megegyezik, ezért abból, hogy a terület az alap és magasság szorzatának fele, a C csúcshoz tartozó magasság és a D csúcshoz tartozó magasság (a megfelelő háromszögekben) is 7 cm. Ez azt jelenti, hogy a négyszög egy trapéz, amelynek párhuzamos oldalai AB és CD, magassága pedig 7 cm. DCB területe 42 cm^2, ebből szintén a területképlet felhasználásával adódik, hogy $CD = 12$ cm.

D7. Eldorádóban egy év 20 hónapból és minden hónap 20 napból áll. Egy nap Brigi megkérdezte az Eldorádóban lakó Adélt, hogy mikor van a születésnapja. Adél azt felelte, hogy csak azt árulja el, hogy a születésnapjában mennyi a hónap és a nap számának a szorzata (például ha a 4. hónap 19. napján született, akkor $4 \cdot 19 = 76$-ot mondott). Ebből Brigi már meg tudta határozni, hogy mikor van Adél születésnapja. Ezen információk alapján hány olyan napja van az évnek, amelyen Adél születhetett?

Megoldás: Vegyük észre, hogyha Adél az a-adik hónap b-edik napján született volna, akkor pontosan ugyanazt a számot mondta volna Briginek, mintha a b-edik hónap a-adik napján született volna. Tehát csak akkor lehetséges, hogy Brigi meg tudta határozni a születénapját ennyiből, ha a születési dátumában a hónap és a nap száma megegyezik.

- Az 1. hónap 1. napján születhetett Adél, hiszen az 1 másképpen nem írható fel két pozitív egész szám szorzataként.
- A 2. hónap 2. napján nem születhetett, hiszen $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$.
- A 3. hónap 3. napján nem születhetett, hiszen $3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$.
- A 4. hónap 4. napján nem születhetett, hiszen $4 \cdot 4 = 16 \cdot 1$.
- A p-edik hónap p-edik napján születhetett Adél (ahol p egy háromnál nagyobb prím, azaz 5, 7, 11, 13, 17, vagy 19), hiszen akkor p^2-et mondott Briginek, ami kizárólag $p \cdot p, 1 \cdot p^2$ és $p^2 \cdot 1$ alakban írtható fel, de ekkor már $p^2 > 20$.
- A 6. hónap 6. napján nem születhetett, hiszen $6 \cdot 6 = 3 \cdot 12$.
- A 8. hónap 8. napján nem születhetett, hiszen $8 \cdot 8 = 4 \cdot 16$.
- A 9. hónap 9. napján születhetett, hiszen $9 \cdot 9$-nek nincsen 9-nél nagyobb, de 20-nál nem nagyobb osztója.
- A 10. hónap 10. napján nem születhetett, hiszen $10 \cdot 10 = 5 \cdot 20$.
- A 12. hónap 12. napján nem születhetett, hiszen $12 \cdot 12 = 9 \cdot 16$.
- Ha $n > 12$, akkor az n. hónap n. napján születhetett Adél, hiszen semelyik ilyen n esetén nem lesz $n \cdot n$-nek n-nél nagyobb, de 20-nál nem nagyobb osztója.

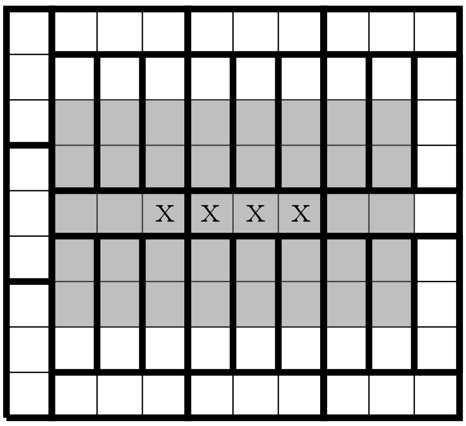
Összeszámolva ezeket a lehetőségeket (1, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) Adél az évnek összesen 13 napján születhetett.

D8. Adott az ABC háromszög és két kör (k_1 és k_2) úgy, hogy a k_1 kör átmérője AB és a k_2 kör átmérője AC. Legyen a BC szakasz és a k_1 kör B-től különböző metszéspontja P, valamint a BC szakasz és a k_2 kör C-től különböző metszéspontja Q. Tudjuk, hogy $AB = 3003$, $AC = 4004$ és $BC = 5005$. Mennyi a P és Q pontok távolsága?

Megoldás: A P és Q pontok távolsága 0, hisz az A pontból húzott magasság talpontja, T, a Thalész-tétel miatt mindkét körön rajta lesz, különbözik B-től és C-től, és rajta van a BC szakaszon, úgyhogy alkalmas P-nek és Q-nak, így $P = T = Q$.

D9. Egy polisz 90 db négyzet alapú házból áll (lásd az alábbi térképet). A polisznak két része van: a szürke rész a belváros, mely 40 házból áll, a maradék rész pedig a külváros, mely 50-ből. A várost 30 db, három házból álló összefüggő körzetre osztják. Minden körzetnek lesz egy képviselője, azon részből, amelyhez a benne lévő házak többsége tartozik. Mi a belvárosi képviselők lehető legnagyobb száma? *Egy három házból álló körzet akkor összefüggő, ha van olyan ház a három közül, melynek mindkét másikkal van közös oldala.*

Megoldás: 19 belvárosi képviselő elérhető pl. az alábbi beosztás szerint:



20 vagy több belvárosi képviselő ugyanakkor nem érhető el. Ugyanis ekkor legalább 20 körzetben lenne legalább kettő belvárosi ház, ami azt jelenti, hogy minden belvárosi ház pontosan kettő belvárosi (és egy külvárosi) házat tartalmazó körzetben lenne. Ugyanakkor van négy db olyan (az ábrán $\times$-szel jelölt) belvárosi ház, amely három belvárosi házból álló körzetben lesz bármely beosztásnál, így ez nem lehetséges.

D10. Egy téglalap köréírt körének sugara 7 cm, területe pedig 64 cm^2. Hány centiméter a téglalap kerülete?

Megoldás: A téglalap átlója egyben a körülírt körének is az átmérője. Mivel egy kör átmérőjének a hossza a sugara hosszának kétszerese, ezért a téglalap átlója $7 \cdot 2 = 14$ egység. Legyen a téglalap egyik oldala a cm, a másik pedig b cm. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, kerülete $K = 2(a + b)$, az átlója hosszának a négyzete pedig a Pitagorasz-tétel alapján $14^2 = a^2 + b^2$. Ekkor $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 14^2 + 2 \cdot T = 196 + 2 \cdot 64 = 324$. Tehát a centiméterben mért kerület felének a négyzete 324. Mivel egy alakzat kerülete csak pozitív lehet, emiatt a kerület fele 18 cm, tehát a téglalap kerülete 36 cm.

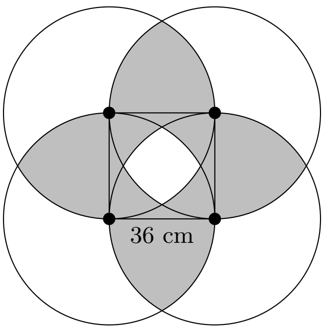
D11. Zoli az alábbi 4×4-es táblázatot szeretné kitölteni az 1, 2, 3 és 4 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban, oszlopban, valamint a bal felső mezőtől a jobb alsóig haladó átlóban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Legfeljebb mennyi lehet a hat szürke mezőbe írt szám összege?

Megoldás: A megoldás 17.

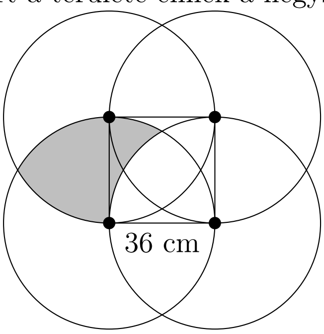
4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

Egyik szám sem szerepelhet több mint kétszer a kijelölt mezőkön, mert akkor ilyen számot nem tudnánk az átlóba írni. Ezért az egyetlen lehetőség, amikor az összeg nagyobb lenne, mint 17, az az, amikor 2 db kettes, 2 db hármas és 2 db négyes kerül a kijelölt mezőkre. De ekkor ezen három szám közül valamelyik az átló középső két mezője közül valamelyikre kerül, és könnyen látható, hogy ebben az esetben nem tudunk négy darabot ebből a számból beírni, ezért ez az eset nem lehetséges.

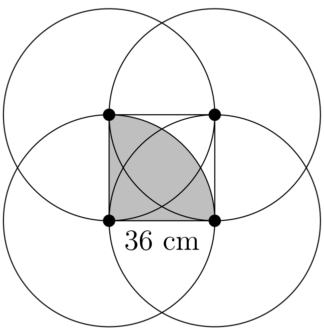
D12. Arkhimédész rajzolt a homokba egy 36 cm oldalú négyzetet, majd annak minden csúcsa köré egy 36 cm sugarú kört is. Ha a szürke részek összterülete $n \cdot \pi$ cm^2, mennyi n értéke?
Ne zavard a köreimet!



Megoldás: Vegyük észre, hogy a szürke rész az alábbi színezett rész négy egybevágó képeként előáll, ezért a területe ennek a négyszerese:



A bal oldali halpikkelyt helyezzük át egy vele egybevágó területre, így egy azonos területű alakzatot kapunk:



Ez pedig egy negyedkört határoz meg, melynek sugara 36 cm, tehát a terület $\frac{1}{4} \cdot 36 \cdot 36 \cdot \pi$ cm$^2 = 324\pi$ cm^2. Emiatt az eredeti szürke rész területe $4 \cdot 324 = 1296\pi$ cm^2, vagyis $n = 1296$.

D13. A *bináris sudoku* egy olyan rejtvény, amiben úgy kell kitölteni egy táblázatot 0 és 1 számjegyekkel, hogy minden sorban és minden oszlopban ugyanannyi 0 legyen, mint 1, és ne legyen három cella egymás mellett egy sorban vagy egy oszlopban, melyben ugyanaz a számjegy szerepel. Az alábbi bináris sudoku feladványt megoldva mi lesz a két átlóban szereplő számjegyek összege?

							1
			0			1	1
	1						
1				0			1
				0	0		
						0	
			0				
				1		0	

Megoldás:

Ha a feladványban valahol egymás mellett lenne két azonos jegy vízszintesen vagy függőlegesen, akkor a két "végükre" csak a másik jegy kerülhet, mivel különben három azonos jegy lenne egymás után. Ugyanemiatt, ha van két azonos szám, melyek egy sorban vagy oszlopban vannak és van közöttük egy üres hely, akkor arra az üres helyre a másik jegy fog kerülni (lásd az ábrákat, a szürke háttérrel rendelkező cellák voltak ismertek, a fehérek, azok, amiket beírtunk).

1	0	0	1

1
0
1

Ezt a kétféle lépést alkalmazva és azt figyelembe véve, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 db 0 és 4 db 1 van, egyszerű kitölteni az ábrát ennyire:

				0			1
			0	1	0	1	1
	1			1			0
1				0			1
			1	0	0	1	
				1		0	
		1	0	0	1	1	0
				1		0	x

Vegyük észre, hogy ekkor az x-szel jelölt négyzetbe kizárólag 0 kerülhet, hiszen, ha 1-et írnánk oda, akkor az lenne a 4. az oszlopában, tehát az üres mezőkbe már 0 kerülne, ekkor viszont lenne 3 db 0 egymás fölött.

A jobb alsó sarokba 0-t írva és a korábbi észrevételeink segítségével, további számokat beírva idáig tudunk eljutni:

			1	0	1	0	1
y			0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
			1	0	0	1	0
		0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0
			0	1	1	0	0

Vegyük észre, hogyha az y-nal jelölt cellába 1-et írnánk, akkor az lenne a 4. a sorában és a megmaradó helyeket 0-kkal kitöltve lenne 3 db 0 egymás mellett, tehát abba a cellába kizárólag 0 kerülhet.

Ezt észrevéve ennyire tudjuk kitölteni az ábrát:

1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
	z		1	0	0	1	0
		0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0
			0	1	1	0	0

Ennél az állásnál, ha a z-vel jelölt cellába 0-t írnánk, akkor az oszlopába már nem kerülhetne több, így viszont 3 db 1 kerülne egymás alá. Tehát z helyére kizárólag 1 kerülhet.

Ezt beírva már ki tudjuk tölteni az egész ábrát a feladat elején leírt lépésekkel. A teljes kitöltés:

1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0

Tehát a végeredményben a két főátlóban szereplő számjegyek összege 5.

D14. Mnémoszüné az egyik nap úgy döntött, hogy kiszínezi az összes természetes számot növekvő sorrendben. A 0-t, az 1-et és a 2-t barnára színezte, a kedvenc számát, a 3-at viszont aranyszínűre. Innentől minden olyan számot, amiben (tízes számrendszerben) a számjegyek összege egy nála kisebb aranyszínű szám, aranyszínűre színezett, a többit barnára. Hány négyjegyű számot színezett aranyszínűre Mnémoszüné?

Megoldás: Egy szám 9-es maradéka megegyezik a számjegyei összegének 9-es maradékával. Továbbá minden legalább kétjegyű szám esetén a számjegyek összege kisebb lesz magánál a számnál.

Tegyük fel, hogy egy $9k+3$ alakú szám nem aranyszínű valamilyen k természetes szám esetén. Legyen a legkisebb ilyen szám m. Ekkor m nem lehet egyjegyű, mivel a 3 aranyszínű szám és más egyjegyű $9k+3$ alakú szám nincs. m viszont többjegyű sem lehet, mivel akkor a számjegyeinek összege egy nála kisebb $9k+3$ alakú szám, ami viszont aranyszínű, abból kifolyólag, hogy m a legkisebb olyan, ami nem az, de ekkor m-nek is aranyszínűnek kellene lennie, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát minden $9k+3$ alakú szám aranyszínű.

Egy olyan szám viszont, aminek a 9-es maradéka nem 3, nem lehet aranyszínű. Ennek bizonyításához tegyük fel, hogy $n = 9k + l$ a legkisebb, nem $9k+3$ alakú szám, ami aranyszínű (ahol $0 \leq l < 9$, $n \neq 0$ és k természetes szám). Az nyilvánvaló, hogy n nem lehet egyjegyű, ha többjegyű akkor viszont a számjegyeinek összege egy nála kisebb $9k+l$ alakú szám, aminek a feltételek alapján szintén aranyszínűnek kellene lennie, ami viszont ellentmond annak, hogy n a legkisebb ilyen.

Tehát már csak azt kell megszámolnunk, hogy hány négyjegyű $9k+3$ alakú szám van. A legkisebb k, amire $9k+3$ négyjegyű lesz a 111, a legnagyobb az 1110. Mivel 111 és 1110 között összesen 1000 természetes szám van, ezért 1000 darab négyjegyű számot festett aranyszínűre Mnémoszüné.

D15. Minósz király a 3 fia között a téglalap alakú, Kréta nevű szigetét a következőképpen osztotta fel: felhúzatott egy falat a sziget egyik átlójában, és a sziget egyik felét odaadta a legnagyobb fiának. Majd a maradék háromszög alakú területen a fal nélküli csúcsból építtetett egy merőleges falat a másik falra. Az így kapott két területből a nagyobbat a középső, a kisebbet a legkisebb fia kapta. Mindhárom fiú a saját területére megépíttette a lehető legnagyobb alapterületű négyzet alakú palotát. Hányszor nagyobb a legnagyobb fiú palotájának a területe a legkisebb fiúénál, ha a sziget oldalai 30 m és 210 m hosszúak?

Megoldás: Legyen a téglalap $ABCD$, a behúzott átló AC, valamint a B-ből AC-re állított merőleges talppontja T. Ekkor tudjuk, hogy az ABC és CAD háromszögek egybevágóak, valamint a BCT és a ABT háromszögek hasonlóak egymáshoz és ABC-hez is. Ekkor viszont a három kapott terület hasonló egymáshoz, tehát a paloták területeinek aránya megegyezik a hasonlósági arányok négyzeteivel. A legkisebb terület átfogója a téglalap rövidebbik oldala, míg a legnagyobbé a téglalap átlója. Pitagorasz-tétel miatt az utóbbi $\sqrt{210^2+30^2}$ cm, vagyis a kérdéses arány $\left(\frac{\sqrt{210^2+30^2}}{30}\right)^2 = 50$.

D16. Csongi vett egy 12 oldalú konvex sokszög alapú pizzát, melynek belsejében nincs olyan pont, amin 3 átló menne át. Áron fel szeretné vágni a pizzát 3 átló mentén úgy, hogy pontosan 6 pizzadarab keletkezzen. Hányféle módon teheti ezt meg? *Két felvágási mód különböző, ha valamelyikben van olyan vágásvonal, ami a másikban nincs.*

Megoldás: Három egyenes, amelyek közt nincsenek párhuzamosak és nem egy ponton mennek át, hét részre osztja a síkot. Ahhoz, hogy a pizzát csak 6 részre ossza a 3 átló, pontosan két belső metszéspontnak kell lennie, mivel ha nem metszik egymást a pizzán belül, akkor 4 részre osztják a pizzát, ha 1 metszéspont van akkor 5-re, ha 2 akkor 6-ra, ha 3 akkor 7-re. Két lehetőség van:

Ha nincs két átló, aminek az egyik végpontja megegyezik, azaz a 3 átló végpontjai hatszöget alkotnak, akkor csak úgy lesz két metszéspont, ha a három átló közül az egyik a hatszög két szemközti csúcsát köti össze, a másik kettő másodszomszédos csúcsokat. Ehhez ki kell választani 6-ot a 12 csúcsból és kiválasztani, hogy a három szemközti csúcspár közül melyek között fut átló, ez összesen $3\binom{12}{6} = 2772$ lehetőség.

Ha a pizza egyik csúcsában két átló találkozik, akkor ki kell választani 5-öt a 12 csúcsból és azt, hogy az 5-ből melyikben találkozik két átló, és ez már meghatározza az átlókat, mivel ezt a csúcsot a vele nem szomszédos kiválasztott csúcsokkal kell összekötnie átlónak, a maradék két csúcsot meg egymással, hogy két belső metszéspont keletkezzen. Ez összesen $5\binom{12}{5} = 3960$ lehetőség.

Így összesen $2772 + 3960 = 6732$ lehetőség van.