XVI. DÜRER VERSENY

Döntő:
2023. február 10-12.

MATEMATIKA
VÁLTÓ
MEGOLDÓKULCS

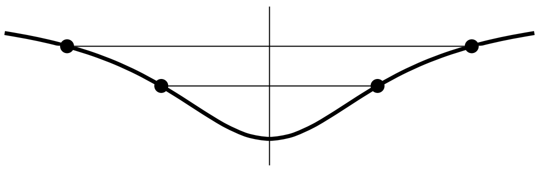
E+1. Nüxnek három moira lánya van, akiknek az életkora három különböző prímszám, és ezek négyzetösszege is prímszám. Hány éves a legfiatalabb moira?

Megoldás: Legyen a három életkor p, q és r, amikre tehát tudjuk, hogy $p^2 + q^2 + r^2$ is prímszám. Tudjuk, hogy ebben az összegben minden tag legalább 4, vagyis mivel prím, nem lehet osztható 3-mal, sem 2-vel. De ekkor ha p, q, r egyike sem lenne osztható hárommal, akkor a négyzeteiknek mind 1 lenne a maradéka 3-mal osztva, ami ellentmondás, mivel az összeg mégis osztható lenne 3-mal. Feltehetjük tehát, hogy $r = 3$. Ekkor viszont ahhoz, hogy a négyzetösszeg páratlan legyen, vagy p és q is páros, vagy mindkettő páratlan. Előbbi esetben viszont két testvér is 2 éves lenne, ami nem megengedett. Vagyis nincs 2 éves testvér, de 3 éves van, tehát a legfiatalabb moira 3 éves. (A feladat feltételei teljesülhetnek is, például $p = 3$, $q = 5$, $r = 7$ esetben, mert $p^2 + q^2 + r^2 = 83$ is prím.)

E+2. Egy téglalap köréírt körének sugara 7 cm, területe pedig 64 cm^2. Hány centiméter a téglalap kerülete?

Megoldás: A téglalap átlója egyben a körülírt körének is az átmérője. Mivel egy kör átmérőjének a hossza a sugara hosszának kétszerese, ezért a téglalap átlója $7 \cdot 2 = 14$ egység. Legyen a téglalap egyik oldala a cm, a másik pedig b cm. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, kerülete $K = 2(a + b)$, az átlója hosszának a négyzete pedig a Pitagorasz-tétel alapján $14^2 = a^2 + b^2$. Ekkor $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 14^2 + 2 \cdot T = 196 + 2 \cdot 64 = 324$. Tehát a centiméterben mért kerület felének a négyzete 324. Mivel egy alakzat kerülete csak pozitív lehet, emiatt a kerület fele 18 cm, tehát a téglalap kerülete 36 cm.

E+3. Hápi, a Nílus éves áradásának istene épp készül az idei áradásra. A Nílus medrének alakját az $y = \frac{-1000}{x^2+100}$ függvény írja le, ahol az x és y koordináták méterben értendőek. A folyó vízmélysége jelenleg 5 méter, és Hápi 3 méterrel tervezi megnövelni a vízszintet. Hány méter széles lesz a folyó az áradás után? *A folyó mélységét mindig a meder legmélyebb pontjánál mérjük.*



Megoldás: A folyó mélysége $5 + 3 = 8$ méter lesz az áradás után. $x = 0$ pontban a Nílus meder $y = \frac{-1000}{x^2+100} = \frac{-1000}{100} = -10$-nál van, így a vízszint az áradás után $y = -10 + 8 = -2$-nél. A folyó szélességének megállapításához azt akarjuk megtalálni, hogy mely 2 pontja a medernek van ebben a magasságban, azaz a $-2 = y = \frac{-1000}{x^2+100}$ egyenletet akarjuk megoldani. Átrendezve $2x^2 + 200 = 1000$, tehát $x^2 = 400$, így $x = \pm 20$, így a folyó szélessége $20 - (-20) = 40$ méter.

E+4. Eldorádóban egy év 20 hónapból és minden hónap 20 napból áll. Egy nap Brigi megkérdezte az Eldorádóban lakó Adélt, hogy mikor van a születésnapja. Adél azt felelte, hogy csak azt árulja el, hogy a születésnapjában mennyi a hónap és a nap számának a szorzata (például ha a 4. hónap 19. napján született, akkor $4 \cdot 19 = 76$-ot mondott). Ebből Brigi már meg tudta határozni, hogy mikor van Adél születésnapja. Ezen információk alapján hány olyan napja van az évnek, amelyen Adél születhetett?

Megoldás: Vegyük észre, hogyha Adél az a-adik hónap b-edik napján született volna, akkor pontosan ugyanazt a számot mondta volna Briginek, mintha a b-edik hónap a-adik napján született volna. Tehát csak akkor lehetséges, hogy Brigi meg tudta határozni a születénapját ennyiből, ha a születési dátumában a hónap és a nap száma megegyezik.

- Az 1. hónap 1. napján születhetett Adél, hiszen az 1 másképpen nem írható fel két pozitív egész szám szorzataként.
- A 2. hónap 2. napján nem születhetett, hiszen $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$.

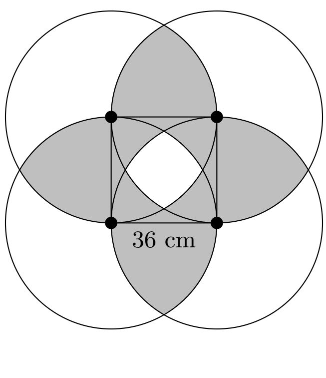
- A 3. hónap 3. napján nem születhetett, hiszen $3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$.
- A 4. hónap 4. napján nem születhetett, hiszen $4 \cdot 4 = 16 \cdot 1$.
- A p-edik hónap p-edik napján születhetett Adél (ahol p egy háromnál nagyobb prím, azaz 5, 7, 11, 13, 17, vagy 19), hiszen akkor p^2-et mondott Briginek, ami kizárólag $p \cdot p, 1 \cdot p^2$ és $p^2 \cdot 1$ alakban írható fel, de ekkor már $p^2 > 20$.
- A 6. hónap 6. napján nem születhetett, hiszen $6 \cdot 6 = 3 \cdot 12$.
- A 8. hónap 8. napján nem születhetett, hiszen $8 \cdot 8 = 4 \cdot 16$.
- A 9. hónap 9. napján születhetett, hiszen $9 \cdot 9$-nek nincsen 9-nél nagyobb, de 20-nál nem nagyobb osztója.
- A 10. hónap 10. napján nem születhetett, hiszen $10 \cdot 10 = 5 \cdot 20$.
- A 12. hónap 12. napján nem születhetett, hiszen $12 \cdot 12 = 9 \cdot 16$.
- Ha $n > 12$, akkor az n. hónap n. napján születhetett Adél, hiszen semelyik ilyen n esetén nem lesz $n \cdot n$-nek n-nél nagyobb, de 20-nál nem nagyobb osztója.

Összeszámolva ezeket a lehetőségeket (1, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) Adél az évnek összesen 13 napján születhetett.

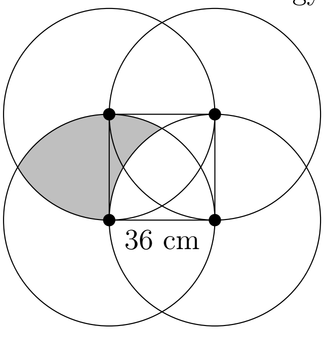
E+5. Minósz király a 3 fia között a téglalap alakú, Kréta nevű szigetét a következőképpen osztotta fel: felhúzatott egy falat a sziget egyik átlójában, és a sziget egyik felét odaadta a legnagyobb fiának. Majd a maradék háromszög alakú területen a fal nélküli csúcsból építtetett egy merőleges falat a másik falra. Az így kapott két területből a nagyobbat a középső, a kisebbet a legkisebb fia kapta. Mindhárom fiú a saját területére megépíttette a lehető legnagyobb alapterületű négyzet alakú palotát. Hányszor nagyobb a legnagyobb fiú palotájának a területe a legkisebb fiúénál, ha a sziget oldalai 30 m és 210 m hosszúak?

Megoldás: Legyen a téglalap $ABCD$, a behúzott átló AC, valamint a B-ből AC-re állított merőleges talppontja T. Ekkor tudjuk, hogy az ABC és CAD háromszögek egybevágóak, valamint a BCT és a ABT háromszögek hasonlóak egymáshoz és ABC-hez is. Ekkor viszont a három kapott terület hasonló egymáshoz, tehát a paloták területeinek aránya megegyezik a hasonlósági arányok négyzeteivel. A legkisebb terület átfogója a téglalap rövidebbik oldala, míg a legnagyobbé a téglalap átlója. Pitagorasz-tétel miatt az utóbbi $\sqrt{210^2 + 30^2}$ cm, vagyis a kérdéses arány $\left(\frac{\sqrt{210^2+30^2}}{30}\right)^2 = 50$.

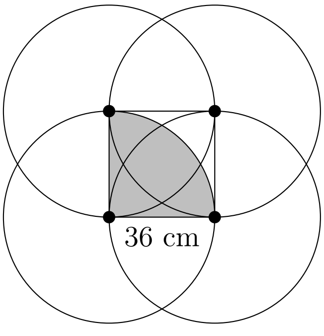
E+6. Arkhimédész rajzolt a homokba egy 36 cm oldalú négyzetet, majd annak minden csúcsa köré egy 36 cm sugarú kört is. Ha a szürke részek összterülete $n \cdot \pi$ cm^2, mennyi n értéke?
Ne zavard a köreimet!



Megoldás: Vegyük észre, hogy a szürke rész az alábbi színezett rész négy egybevágó képeként előáll, ezért a területe ennek a négyszerese:



A bal oldali halpikkelyt helyezzük át egy vele egybevágó területre, így egy azonos területű alakzatot kapunk:



Ez pedig egy negyedkört határoz meg, melynek sugara 36 cm, tehát a terület $\frac{1}{4} \cdot 36 \cdot 36 \cdot \pi$ cm$^2 = 324\pi$ cm^2. Emiatt az eredeti szürke rész területe $4 \cdot 324 = 1296\pi$ cm^2, vagyis $n = 1296$.

E+7. Mnémoszüné az egyik nap úgy döntött, hogy kiszínezi az összes természetes számot növekvő sorrendben. A 0-t, az 1-et és a 2-t barnára színezte, a kedvenc számát, a 3-at viszont aranyszínűre. Innentől minden olyan számot, amiben (tízes számrendszerben) a számjegyek összege egy nála kisebb aranyszínű szám, aranyszínűre színezett, a többit barnára. Hány négyjegyű számot színezett aranyszínűre Mnémoszüné?

Megoldás: Egy szám 9-es maradéka megegyezik a számjegyei összegének 9-es maradékával. Továbbá minden legalább kétjegyű szám esetén a számjegyek összege kisebb lesz magánál a számnál.

Tegyük fel, hogy egy $9k+3$ alakú szám nem aranyszínű valamilyen k természetes szám esetén. Legyen a legkisebb ilyen szám m. Ekkor m nem lehet egyjegyű, mivel a 3 aranyszínű szám és más egyjegyű $9k+3$ alakú szám nincs. m viszont többjegyű sem lehet, mivel akkor a számjegyeinek összege egy nála kisebb $9k+3$ alakú szám, ami viszont aranyszínű, abból kifolyólag, hogy m a legkisebb olyan, ami nem az, de ekkor m-nek is aranyszínűnek kellene lennie, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát minden $9k+3$ alakú szám aranyszínű.

Egy olyan szám viszont, aminek a 9-es maradéka nem 3, nem lehet aranyszínű. Ennek bizonyításához tegyük fel, hogy $n = 9k + l$ a legkisebb, nem $9k+3$ alakú szám, ami aranyszínű (ahol $0 \leq l < 9$, $n \neq 0$ és k természetes szám). Az nyilvánvaló, hogy n nem lehet egyjegyű, ha többjegyű akkor viszont a számjegyeinek összege egy nála kisebb $9k+l$ alakú szám, aminek a feltételek alapján szintén aranyszínűnek kellene lennie, ami viszont ellentmond annak, hogy n a legkisebb ilyen.

Tehát már csak azt kell megszámolnunk, hogy hány négyjegyű $9k+3$ alakú szám van. A legkisebb k, amire $9k+3$ négyjegyű lesz a 111, a legnagyobb az 1110. Mivel 111 és 1110 között összesen 1000 természetes szám van, ezért 1000 darab négyjegyű számot festett aranyszínűre Mnémoszüné.

E+8. Zoli az alábbi 4×4-es táblázatot szeretné kitölteni az 1, 2, 3 és 4 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban, oszlopban, valamint a bal felső mezőtől a jobb alsóig haladó átlóban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Legfeljebb mennyi lehet a hat szürke mezőbe írt szám összege?

Megoldás: A megoldás 17.

4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

Egyik szám sem szerepelhet több mint kétszer a kijelölt mezőkön, mert akkor ilyen számot nem tudnánk az átlóba írni. Ezért az egyetlen lehetőség, amikor az összeg nagyobb lenne, mint 17, az az, amikor 2 db kettes, 2 db hármas és 2 db négyes kerül a kijelölt mezőkre. De ekkor ezen három szám közül valamelyik az átló középső két mezője közül valamelyikre kerül, és könnyen látható, hogy ebben az esetben nem tudunk négy darabot ebből a számból beírni, ezért ez az eset nem lehetséges.

E+9. A *bináris sudoku* egy olyan rejtvény, amiben úgy kell kitölteni egy táblázatot 0 és 1 számjegyekkel, hogy minden sorban és minden oszlopban ugyanannyi 0 legyen, mint 1, és ne legyen három cella egymás mellett egy sorban vagy egy oszlopban, melyben ugyanaz a számjegy szerepel. Az alábbi bináris sudoku feladványt megoldva mi lesz a két átlóban szereplő számjegyek összege?

							1
			0			1	1
	1						
1				0			1
				0	0		
						0	
			0				
				1		0	

Megoldás:

Ha a feladványban valahol egymás mellett lenne két azonos jegy vízszintesen vagy függőlegesen, akkor a két "végükre" csak a másik jegy kerülhet, mivel különben három azonos jegy lenne egymás után. Ugyanemiatt, ha van két azonos szám, melyek egy sorban vagy oszlopban vannak és van közöttük egy üres hely, akkor arra az üres helyre a másik jegy fog kerülni (lásd az ábrákat, a szürke háttérrel rendelkező cellák voltak ismertek, a fehérek, azok, amiket beírtunk).

1	0	0	1

1
0
1

Ezt a kétféle lépést alkalmazva és azt figyelembe véve, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 db 0 és 4 db 1 van, egyszerű kitölteni az ábrát ennyire:

				0			1
			0	1	0	1	1
	1			1			0
1				0			1
			1	0	0	1	
				1		0	
		1	0	0	1	1	0
				1		0	x

Vegyük észre, hogy ekkor az x-szel jelölt négyzetbe kizárólag 0 kerülhet, hiszen, ha 1-et írnánk oda, akkor az lenne a 4. az oszlopában, tehát az üres mezőkbe már 0 kerülne, ekkor viszont lenne 3 db 0 egymás fölött.

A jobb alsó sarokba 0-t írva és a korábbi észrevételeink segítségével, további számokat beírva idáig tudunk eljutni:

			1	0	1	0	1
y			0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
			1	0	0	1	0
		0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0
			0	1	1	0	0

Vegyük észre, hogyha az y-nal jelölt cellába 1-et írnánk, akkor az lenne a 4. a sorában és a megmaradó helyeket 0-kkal kitöltve lenne 3 db 0 egymás mellett, tehát abba a cellába kizárólag 0 kerülhet.

Ezt észrevéve ennyire tudjuk kitölteni az ábrát:

1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
	z		1	0	0	1	0
		0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0
			0	1	1	0	0

Ennél az állásnál, ha a z-vel jelölt cellába 0-t írnánk, akkor az oszlopába már nem kerülhetne több, így viszont 3 db 1 kerülne egymás alá. Tehát z helyére kizárólag 1 kerülhet.

Ezt beírva már ki tudjuk tölteni az egész ábrát a feladat elején leírt lépésekkel. A teljes kitöltés:

1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0

Tehát a végeredményben a két főátlóban szereplő számjegyek összege 5.

E+10. Marvin nagyon szereti a palacsintát, ezért megkéri a nagymamáját, hogy időnként készítsen neki. Nagymama a palacsintákat 32 darabos adagokban küldi. Marvin amikor megkívánja a palacsintát, megeszi a nála lévő palacsinták felét. A mai ebédre Marvin 157 palacsintát evett meg. Legalább hány alkalommal küldött eddig nagymama palacsintát Marvinnak? *Marvin egy alkalommal nem feltétlenül egész mennyiségű palacsintát eszik és egy nap legfeljebb egyszer kívánja meg a palacsintát.*

Megoldás: Mivel utoljára 157 palacsintát evett, így 314 palacsintája volt a előtte. Tehát úgy is fel lehet fogni a feladatot, hogy a cél az, hogy 0-átol eljussunk 314-ig a következő kétféle lépés segítségével: A *nagymama lépés* ami hozzáad a számhoz 2^5-t, és a *Marvin lépés* ami felezi a számot. Egy *nagymama lépés* és a nem feltétlenül közvetlenül utána végzett n darab *Marvin lépés* a végeredményhez 2^{5-n}-t tesz hozzá. Jelölje a_n azt, hogy hány olyan *nagymama lépést* csinálunk, ami után összesen még n darab *Marvin lépés* van. Ekkor $314 = a_0 \cdot 2^5 + a_1 \cdot 2^4 + \ldots + a_5 \cdot 2^0 + \ldots$ és a cél az, hogy $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_5 + \ldots$ összeg minimális legyen. Tegyük fel, hogy az egyik ilyen konstrukcióban ahol az összeg minimális, létezik $i \geq 1$, hogy $a_i \geq 2$. Ekkor ha növeljük eggyel a_{i-1}-et és csökkentjük a_i-t 2-vel, akkor z első egyenlőség ugyanúgy teljesül, de az összeget csökkentettük eggyel, tehát ez mégsem egy optimális megoldás. Azaz minden $i \geq 1$-re a_i 0 vagy 1. Mivel az összeg egész, és $i \geq 6$-ra $a_i \leq 1$, ezért látható, hogy $a_i = 0$, minden $i \geq 6$ esetén. Tekintsük az egyenlőséget kettes számrendszerben, a 314 kettes számrendszerben 100111010 míg az egyenlőség másik felén is majdnem egy kettes számrendszerbeli felírás van, csak 32-nél nagyobb számok helyett további 32-eseket lehet csak használni. Ebből látható, hogy $a_0 = 9$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ és $a_5 = 0$. Tehát a második összeg elméleti minimuma 12. Ennyivel meg is oldható, például az $nMMnMnMnnnnnnnnnM$ sorozattal, ahol n *nagymama lépést* jelöli, M pedig a *Marvin lépést.*

E+11. Egy ország 2023 városa közt repülőjáratok vannak. Minden repülőjárat két várost köt össze, mindkét irányban. Tudjuk, hogy bármely városból el lehet jutni bármelyik másikba ezekkel a repülőjáratokkal, valamint minden városból legfeljebb 4 másik városba indul repülőjárat. Legfeljebb hány olyan város lehet az országban, ahonnan csak 1 városba van repülőjárat?

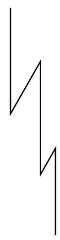
Megoldás:

Tekintsünk úgy a városokra és a járatokra, mint egy gráfra. A feltételek szerint összefüggő, azaz tartalmaz feszítőfát, így legalább 2022 éle van, azaz legalább 4044 a fokszámok összege. Jelöljük a-val a keresett értéket, azaz az egy fokú csúcsok számát a gráfban. Ekkor a csúcsok fokainak összege legfeljebb $a + 4(2023 - a)$, mivel az összes csúcs foka legfeljebb 4. Ezeket összevetve

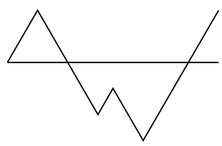
$$4044 \leq a + 4(2023 - a) = 8092 - 3a.$$

Rendezve $a \leq \frac{4048}{3}$, és mivel a egész így $a \leq 1349$. Az $a = 1349$ tényleg meg is valósítható, például ha veszünk egy 674 hosszú utat, minden csúcsáról lelógatunk két levelet, továbbá az út egyik végpontjáról még egy levelet. Tehát a megoldás 1349.

E+12. Zeusz villámát egy 60 egység hosszú rézrúdból készítik úgy, hogy 4-szer meghajlítják váltakozó irányban olyan módon, hogy két szomszédos rész által bezárt szög mindig 60° legyen. Az így kovácsolt villámnak legkevesebb mennyi lesz a két végpontjának a távolságának a négyzete? *A villám mind az öt szakasza azonos síkban van.*



Megoldás: Vegyük x tengelynek azt az egyenest a villám síkjában, ami átmegy a villám egyik végpontján és 60°-os szöget zár be a villám összes szakaszának egyenesével. Ekkor a másik végpont x koordinátája $60 \cdot \frac{1}{2} = 30$ vagy -30, feltehetjük, hogy 30, mivel félszabályos háromszögek keletkeznek a villám minden szakasza alatt. A $(0,0)$ ponttól az $x = 30$ egyenesen a legközelebbi pont a $(30,0)$, ekkor a távolság négyzete 900. Ehhez csak azt kell elérni, hogy az y koordinátája a másik végpontnak 0 legyen, és ez tényleg meg is valósítható, például ha a szakaszok 10, 20, 10, 10 és 10 egység hosszúak ilyen sorrendben. Így a megoldás 900.



E+13. Csongi vett egy 12 oldalú konvex sokszög alapú pizzát, melynek belsejében nincs olyan pont, amin 3 átló menne át. Áron fel szeretné vágni a pizzát 3 átló mentén úgy, hogy pontosan 6 pizzadarab keletkezzen. Hányféle módon teheti ezt meg? *Két felvágási mód különböző, ha valamelyikben van olyan vágásvonal, ami a másikban nincs.*

Megoldás: Három egyenes, amelyek közt nincsenek párhuzamosak és nem egy ponton mennek át, hét részre osztja a síkot. Ahhoz, hogy a pizzát csak 6 részre ossza a 3 átló, pontosan két belső metszéspontnak kell lennie, mivel ha nem metszik egymást a pizzán belül, akkor 4 részre osztják a pizzát, ha 1 metszéspont van akkor 5-re, ha 2 akkor 6-ra, ha 3 akkor 7-re. Két lehetőség van:

Ha nincs két átló, aminek az egyik végpontja megegyezik, azaz a 3 átló végpontjai hatszöget alkotnak, akkor csak úgy lesz két metszéspont, ha a három átló közül az egyik a hatszög két szemközti csúcsát köti össze, a másik kettő másodszomszédos csúcsokat. Ehhez ki kell választani 6-ot a 12 csúcsból és kiválasztani, hogy a három szemközti csúcspár közül melyek között fut átló, ez összesen $3\binom{12}{6} = 2772$ lehetőség.

Ha a pizza egyik csúcsában két átló találkozik, akkor ki kell választani 5-öt a 12 csúcsból és azt, hogy az 5-ből melyikben találkozik két átló, és ez már meghatározza az átlókat, mivel ezt a csúcsot a vele nem szomszédos kiválasztott csúcsokkal kell összekötnie átlónak, a maradék két csúcsot meg egymással, hogy két belső metszéspont keletkezzen. Ez összesen $5\binom{12}{5} = 3960$ lehetőség.

Így összesen $2772 + 3960 = 6732$ lehetőség van.

E+14. A Dürer döntő eredményhirdetésén a terem kihangosításához négy hangszórót szeretnének használni. Azonban a falban csak két konnektor van, amiből jön áram. A probléma megoldásához Ádám szerzett két hosszabbítót és két elosztót. A hosszabbítókba 1-1, az elosztókba 2-2 dugaszt lehet bedugni. Gábor az eredményhirdetés előtti sietségben gyorsan bedugja a 8 dugaszt a 8 lyukba. A bedugások minden lehetséges módjának ugyanakkora az esélye, az is lehetséges, hogy Gábor valamit önmagába dug be. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az eredményhirdetésen mind a 4 hangszóró szólni fog? *A megoldáshoz az egyszerűsített alakban a számláló és a nevező összegét adjátok meg. Egy hangszóró akkor szól, ha közvetlenül vagy közvetetten be van dugva a falba.*

Megoldás: Először gondoljuk meg, hogy ha a feladatban nem szerepelnének hosszabbítók, akkor is ugyanaz lenne a megoldás. Ez azért igaz, mert tetszőleges konstrukció helyett vehetjük azt, hogy elhagyjuk a hosszabbítókat, és a hosszabbítóba dugott konnektorokat azokba a lyukakba dugjuk át, ahova a megfelelő hosszabbító be volt dugva. Könnyen látható, hogy ez nem változtat a valószínűségeken, például mondhatjuk azt, hogy úgy sorsolunk egyenletesen véletlent, hogy először a hosszabbítókat bedugjuk valahova, és ezután 6 lyuk és 6 dugó marad, amiket véletlenszerűen akarunk bedugni, éppen mint a hosszabbító nélküli feladatban. Tehát oldjuk meg a hosszabbítók nélküli esetet. Látható, hogy pontosan akkor fog szólni mindkét hangszóró, ha mindkét elosztó kap áramot. Ez csak akkor nem történik meg, ha valamelyik elosztó önmagába van dugva, vagy ha egymásba vannak dugva az elosztók. Előbbinek a valószínűsége

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$$

a szita formula szerint, mivel $\frac{1}{3}$ a valószínűsége, hogy egy elosztót önmagába dugunk, így a kettőnek összesen $\frac{2}{3}$, amiből le kell vonni, ha mindkettőt önmagába dugtuk, ami $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$, mivel tudunk úgy egyenletesen sorsolni, ha egyesével dugjuk be véletlenszerűen a konnektorokat, és az elsőnek $\frac{1}{3}$, hogy önmagába dugjuk, a másodiknak ezek után $\frac{2}{5}$. A másik eset, amikor egymásba dugjuk a hosszabbítókat, ennek az előző indokláshoz hasonlóan $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$ a valószínűsége, mivel először dugjuk be az egyiket, ennek $\frac{1}{3}$ az esélye, hogy a másiknak valamelyik lyukába megy, ezek után $\frac{2}{5}$ valószínűséggel megy a másik elosztó dugója az első elosztó egyik lyukába. Ezeket összegezve $\frac{2}{3}$ a valószínűsége, hogy nem szól valamelyik, azaz a megoldás az $\frac{1}{3}$-hoz tartozó $1+3=4$ szám.

E+15. Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, mely mindenképpen osztja p^4-q^4-t, ahol p és q 10-nél nagyobb prímszámok?

Megoldás: Legyen az r prím a keresett, N-nel jelölt szám osztója. Amennyiben $r>10$, ha p-t nagyobbnak vesszük mint r, q-t pedig r-nek, $N \mid p^4-q^4$ de $r \nmid p^4-q^4$ ellentmondás. Tehát N lehetséges prímosztói a 2, 3, 5 és 7. Vegyük észre, hogy $p^4-q^4=(p^2+q^2)(p+q)(p-q)$. Amennyiben $p\equiv 1 \mod 7$ és $q\equiv 2 \mod 7$, az előbbi egyenlet miatt $7\nmid p^4-q^4$. Ilyen p és q például a 29 és 23. Tehát $7\nmid N$.

Mivel p és q 10-nél nagyobb prímek, nem oszthatóak se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel. Tehát p és q 32-es osztási maradéka csak $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, -15, \ldots, -5, -3$ vagy -1 lehet, így p^2 és q^2 32-es maradéka 1, 9, 25 vagy 17 lehet, tehát p^4 és q^4 32-es osztási maradéka csak 1 vagy 17 lehet. Tehát minden megfelelő p, q-ra $16\mid p^4-q^4$, de például $p=97$, $q=67$ esetén $32\nmid p^4-q^4$.

Mivel a négyzetszámok 3-mas osztási maradéka 0 vagy 1, és nem lehet 0 se p se q-ra, $p^4\equiv q^4\equiv 1 \mod 3$. Viszont $19^4-11^4\equiv 1-2^4\not\equiv 0 \mod 9$. Tehát 9 nem osztja mindig p^4-q^4-t.

Mivel a négyzetszámok 5-ös maradéka 0, 1 vagy 4, és nem lehet 0 se p-re se q-ra, $p^4\equiv q^4\equiv 1 \mod 5$. Viszont $29^4-23^4\equiv 4^4-(-2)^4\not\equiv 0 \mod 25$.

Tehát $N=16\cdot 3\cdot 5=240$.

E+16. Mennyi a 2025^(2024^(2022^(2021^(2020^ ...^ (2^1) ...))))) értékének 2023-as maradéka?

A ^ jel a hatványozást jelenti, például 2^$(3$^$2)=2$^$9=512$. A hatványtoronyban 2025-től 1-ig szerepelnek az egész számok, melyek közül csak a 2023 marad ki.

Megoldás: Mivel $2023=7\cdot 17^2$, a hatványtorony 2023-as maradékat megkaphatjuk, ha a 7-es és 17^2-es maradékát kiszámoljuk.

Az Euler-Fermat tételt szeretnénk használni, hogy a hatványtorony kitevőjét csökkentsük a fenti maradékok meghatározására. Tehát szeretnénk $2024^{2022^{2021^{\cdots^{1}}}}$ $\varphi(7)=6$-os és $\varphi(17^2)=16\cdot 17$-es maradékait kiszámolni. Világos, hogy a kisebb torony 16-os maradéka 0, és az is, hogy $17\mid 2023$ miatt a 17-es maradék 1. Mivel $3\nmid 2024$ és párosadik hatványra van emelve, így a 3-mas maradék 1.

Ezek alapján a kisebb hatványtorony 6-os maradéka 4 és a $16 \cdot 17$-es maradéka -16, vagyis 256. Tehát az eredeti hatványtorony 7-es maradéka $2^4 = 16 \equiv 2 \mod 7$. A 17^2-es maradéka pedig

$$2^{256} = 256^{32} \equiv 33^{32} \equiv 1089^{16} \equiv (-67)^{16} \equiv 4489^8 \equiv 154^8 \equiv 23716^4 \equiv 18^4 \equiv 35^2 \equiv 1225 \equiv 69 \mod 289.$$

Mivel $289 \equiv 2 \mod 7$ és az eredeti hatványtorony $289 \cdot m + 69$ alakban írható valamilyen m egész számra, így hogy a 7-es maradéka a hatványtoronynak 2 legyen, $m \equiv 5 \mod 7$ kell, hogy legyen. Tehát $m = 7k + 5$ valamilyen k egész számra, így

$$2025^{2024^{2022^{\cdots^{1}}}} = 2023k + 5 \cdot 289 + 69 \equiv 1514 \mod 2023.$$