XVII. DÜRER VERSENY

ONLINE FORDULÓ 2023. OKTÓBER 19.

MEGOLDÓKULCS

Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
252	8	71	8	78	32	18	14	44

Részletes megoldások

C-1. A két szám legkisebb közös többszörösét kell kiszámolni. Mivel $18 = 2 \cdot 3^2$ és $28 = 2^2 \cdot 7$, így a legkisebb közös többszörös $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

C-2. Három eset van aszerint, hogy csak a felső szigetnégyesbe megyünk bele, csak az alsóba, vagy pedig mindkettőbe. Az első esetben 2 út van, a második esetben szintén 2, a harmadik esetben pedig fent és lent is két-kétféle útvonalat választhatunk, azaz összesen 4 lehetőségünk van. Mindhárom esetet összeadva a lehetséges útvonalak száma $2 + 2 + 4 = 8$.

C-3. Legyen a kódszám n. Ekkor $n + 1$ osztható 3-mal és 8-cal is, és az 5-tel való osztási maradéka 2. Ha egy szám osztható 3-mal és 8-cal, akkor 24-gyel is. A 24 első néhány többszöröse: 24, 48, 72; melyek 5-tel való osztási maradékai rendre 4, 3 és 2. Az $n + 1$ szám lehetséges legkisebb értéke így 72, és így $n = 71$.

C-4. Álljon az eredeti legénység n tagból, akiknek így összesen $1{,}75n = \frac{7}{4}n$ lábuk van. Az új majom megérkezése után az $n + 1$ tagnak összesen $\frac{7}{4}n + 4$ lába van, tehát az új átlagos lábszám $\frac{\frac{7}{4}n+4}{n+1} = 2$. Ekkor $2(n + 1) = \frac{7}{4}n + 4$, amiből $2n + 2 = \frac{7}{4}n + 4$, vagyis $\frac{1}{4}n = 2$, tehát $n = 8$.

C-5. Mivel a 30 m^2 területű vásznat a műhelyben egybevágó, egész oldalhosszú téglalapokra vágják, így a keletkező téglalapok területei egész számok, melyek osztói 30-nak. Ez 8 eset: a területek lehetnek 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 és 30. Az 1 területű vitorla csak 1×1-es lehet. Mivel 2, 3 és 5 prímek, ezért az ilyen területű téglalapok oldalhosszai egyértelműek: 1×2, 1×3 és 1×5, és a vászon tényleg felvágható ekkora darabokra. A 6 esetén a téglalap 1×6 vagy 2×3 méretű lehet, és mindkét esetben lefedhető a vászon ekkora darabokkal. A 10, 15, illetve 30 területű téglalap csak 2×5, 3×5 és 5×6 méretű lehet, mert a 10, 15, 30 számok további osztópárjainak egyik tagja mindig nagyobb 6-nál, azaz az 5×6-os vászon nem rakható ki olyan téglalapokból. Így a lehetséges vitorlák területeinek összege: $1 + 2 + 3 + 5 + 2 \cdot 6 + 10 + 15 + 30 = 78$.

C-6. Mivel a bal alsó szobrot nem tudjuk mozgatni, így az csak felfelé, vagy jobbra nézhet. Mindkét esetben a másik három szobornak ugyanannyi megfelelő álláskombinációja van, így elég megszámolni, hogy hány olyan eset van, amikor a bal alsó szobor felfelé néz (majd megszorozni 2-vel).

Vegyük észre, hogy az nem számít, hogy a két gombot milyen sorrendben nyomkodjuk, csak az, hogy melyiket hányszor nyomtuk meg. Így tehát feltehetjük, hogy először a felső két szobrot mozgató gombot fogjuk nyomogatni néhányszor, majd csak ezután a másikat. Egy gomb 4-szeri megnyomása semmit sem változtat, így feltehetjük, hogy mindkét gombot legfeljebb 3-szor nyomtuk meg. Ekkor a jó kiinduló állásokat aszerint számolva, hogy a két gombot külön-külön 0-szor, 1-szer, 2-szer vagy 3-szor nyomtuk-e meg, összesen $4 \cdot 4$ eset van, mivel mindegyik opció más-más kiinduló állást ad. Így tehát összesen $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ megfelelő kiinduló állás van.

C-7. Minden mezőbe írjunk olyan nyilat, ami éppen a szél irányába mutat. Mivel az X-ből induló hajó B mezőbe jutott, így létezik egy út nyilakból X-ből B-be. Ez az út a két végponttal együtt legalább 7 négyzetből áll (3 jobbra és 3 felfelé nyíl, plusz a B mező). Ha bárhol becsatlakozunk egy útba, akkor onnantól nem tudunk letérni róla, csak a vonalát követhetjük. Tehát ha bármely mezőből A-ba szeretnénk jutni, akkor az utunknak nem lehet közös mezője (azaz nem metszhetik egymást) sem az X $\rightarrow$ B, sem az Y $\rightarrow$ C úttal.

Ez azt jelenti, hogy az Y $\rightarrow$ C út alatti négyzetekből biztosan nem lehet eljutni A-ba. Így akkor kapjuk a lehető legtöbb olyan mezőt, amiből A-ban kötünk ki, ha az Y $\rightarrow$ C út az ábrán látható módon a térkép alsó szélén fut.

					B
					A
Y					
↓		X			C
↓					↑
→	→	→	→	→	↑

Így végül $36 - 7 - 11 = 18$ mező marad, ahonnan el lehet jutni A-ba, és ez lehetséges is (lásd ábra).

→	↓	←	→	→	→
→	↓	→	↑	→	→
↓	↓	↑	→	↑	↑
↓	↓	↑	↑	↑	→
↓	→	→	→	↑	↑
→	→	→	→	→	↑

C-8. Mindkét festéskor 1 kockának lesz befestve 3 lapja, 6 kockának lesz befestve 2 lapja és további 12 kockának lesz befestve 1 lapja. Ez azt jelenti, hogy minden olyan kockának, aminek végül legalább 3 lapja piros, annak az egyik festés során legalább két lapját festették le. Mivel 1-1 kockának egyből 3-3 lapja van befestve, ezért rajtuk kívül csak a maradék 6-6 olyan kocka lehet megfelelő, amiknek 2-2 lapja egyszerre lett befestve. Így tehát összesen legfeljebb 14 kocka lehet megfelelő. Ez pedig el is érhető, ha az előbb említett 1-1 kockának nem lesz több lapja festve, valamint a 6-6 kocka a másik festés során olyan, hogy még 1-1 lapjuk lefestésre került.

C-9. Legyenek a csúcsok A, B, C, D, az oldalfelező pontok E, F, G, H pozitív körüljárással úgy, hogy E az AB oldalon van. A következő két lehetőséget fogjuk tekinteni: a háromszög legnagyobb szöggel rendelkező csúcsa vagy a négyzet egyik csúcsában vagy oldalfelező pontban van.

1. eset: Csúcsban van: ekkor először is tegyük fel, hogy ez az A csúcs. Ekkor a háromszög maradék két csúcsának egyike a D, H, a másik pedig a B, E csúcsok közül kerül ki. Minden kombináció jó háromszöget ad meg, ez összesen 4 lehetőség. Mivel ezt mind a 4 csúcsra elmondhatjuk, így összesen 16 ilyen háromszög van.

2. eset: Oldalfelező pontban van: először tegyük fel, hogy ez az oldalfelező pont az E. A maradék két csúcs ekkor nem lehet egy függőleges egyenesen, tehát az egyik "balra" van a másikhoz képest (ha E a felső vízszintes oldal felezőpontja). A jobb oldali csúcs az A, H, D, G valamelyike, ezekhez

rendre $3, 2, 1, 1$ megfelelő bal oldali csúcs létezik. Mivel ezt minden oldalfelező pontra elmondhatjuk, így összesen $4 \cdot 7 = 28$ ilyen háromszög van.

Ez mindösszesen $16 + 28 = 44$ lehetőség.

C-10. (Játék) Úgy tudunk nyerni, ha másodikként játszunk. Ekkor az ellenfélnek kezdésként egy zsetont el kell vennie, így 16 zseton marad a kupacban. Ezek után mindig, amikor mi jövünk, vegyünk el egy zsetont a kupacból, így az épp páros méretű kupacot páratlanra változtatva. Ezek után a páratlan méretű kupacot ellenfelünk nem tudja megfelezni, emiatt ismét egy zsetont kell elvennie, és így újra páros méretű lesz a kupac. Ezt csináljuk egészen addig, amíg 4 zseton nem marad. Ekkor viszont felezzük meg a kupacot, így 2 zseton marad. Ellenfelünk ezt megfelezni tudja vagy elvenni belőle 1 zsetont, de mindkét esetben 1 zseton marad, melyet elvéve mi nyerünk.