



Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
8	71	8	3552	4	18	14	21	26

Részletes megoldások

D-1. Három eset van aszerint, hogy csak a felső szigetnégyesbe megyünk bele, csak az alsóba, vagy pedig mindkettőbe. Az első esetben 2 út van, a második esetben szintén 2, a harmadik esetben pedig fent és lent is két-kétféle útvonalat választhatunk, azaz összesen 4 lehetőségünk van. Mindhárom esetet összeadva a lehetséges útvonalak száma $2 + 2 + 4 = 8$.

D-2. Legyen a kódszám n . Ekkor $n + 1$ osztható 3-mal és 8-cal is, és az 5-tel való osztási maradéka 2. Ha egy szám osztható 3-mal és 8-cal, akkor 24-gyel is. A 24 első néhány többszöröse: 24, 48, 72; melyek 5-tel való osztási maradékai rendre 4, 3 és 2. Az $n + 1$ szám lehetséges legkisebb értéke így 72, és így $n = 71$.

D-3. Álljon az eredeti legénység n tagból, akiknek így összesen $1,75n = \frac{7}{4}n$ lábuk van. Az új majom megérkezése után az $n + 1$ tagnak összesen $\frac{7}{4}n + 4$ lába van, tehát az új átlagos lábszám $\frac{\frac{7}{4}n + 4}{n + 1} = 2$. Ekkor $2(n + 1) = \frac{7}{4}n + 4$, amiből $2n + 2 = \frac{7}{4}n + 4$, vagyis $\frac{1}{4}n = 2$, tehát $n = 8$.

D-4. Kezdetben a matrózokat ne különböztessük meg egymástól, és csak azt számoljuk, hogy a két állomás mely időtartamokban foglalt; majd a megoldás végén szorozzunk fel $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ -gyel, hiszen ennyiféleképpen helyezhetjük el a matrózokat a kijelölt helyekre és időszávokba. Vizsgáljuk a két állomást az ott jelző matrózok darabszáma szerint:

(i) Ha az északi állomáson 3 matróz küld füstjelet, akkor az ő időbeosztásuk 4-féle lehet, hiszen a 8 és 15 óra közötti 7 órából 6 órát kitöltenek, és az 1 óra, amikor az állomás szabad, lehet az első matróz előtt, az első és második matróz között, a második és harmadik matróz között, vagy a harmadik matróz után. Eközben a déli állomáson az ott jelző matróz 8 és 13 óra között bármely egész órában elkezdheti a jelzést: ez 6 eset. Mivel a két helyen történt események függetlenek, így az esetszámok szorzatát vesszük: $4 \cdot 6 = 24$.

(ii) Ha a déli állomáson küld 3 matróz füstjelet, akkor ugyanígy 24 esetet kapunk.

(iii) Ha 2-2 matróz jelez a két állomáson, akkor északon a két matróz jelzésének kezdete lehet: 8 és 10, 8 és 11, 8 és 12, 8 és 13, 9 és 11, 9 és 12, 9 és 13, 10 és 12, 10 és 13, vagy 11 és 13 óra. A déli állomáson is ugyanezek a variációk lehetnek, így összesen $10 \cdot 10 = 100$ ilyen eset van.

Így a matrózok összesen $(24 + 24 + 100) \cdot 24 = 3552$ -féleképpen jelezhetnek.

D-5. A feladat igazából azt kéri, hogy a 16 szektorba tegyünk minél kevesebb kincset úgy, hogy bármely szektorra igaz legyen, hogy abban, vagy legalább az egyik oldalszomszédjában kincs legyen. Vegyük észre, hogy a tenger bármelyik két sarkára igaz az, hogy nem lehet olyan kincs, ami mindkettővel szomszédos. Emiatt mind a 4 sarokhoz kell legalább 1-1 kincs, vagyis legalább 4 kincset le kell tennünk. Ez meg is valósítható például az ábrának megfelelően, ahol a K betűk jelölik a kincseket.

		K	
K			
			K
	K		

D-6. Minden mezőbe írjunk olyan nyilat, ami éppen a szél irányába mutat. Mivel az X-ből induló hajó B mezőbe jutott, így létezik egy út nyilakból X-ből B-be. Ez az út a két végponttal együtt legalább 7 négyzetből áll (3 jobbra és 3 felfelé nyíl, plusz a B mező). Ha bárhol becsatlakozunk egy útba, akkor onnantól nem tudunk letérni róla, csak a vonalát követhetjük. Tehát ha bármely mezőből A-ba szeretnénk jutni, akkor az utunknak nem lehet közös mezője (azaz nem metszhetik egymást) sem az $X \rightarrow B$, sem az $Y \rightarrow C$ úttal.

Ez azt jelenti, hogy az $Y \rightarrow C$ út alatti négyzetekből biztosan nem lehet eljutni A-ba. Így akkor kapjuk a lehető legtöbb olyan mezőt, amiből A-ban kötünk ki, ha az $Y \rightarrow C$ út az ábrán látható módon a térkép alsó szélén fut.

					B
					A
Y					
↓		X			C
↓					↑
→	→	→	→	→	↑

Így végül $36 - 7 - 11 = 18$ mező marad, ahonnan el lehet jutni A-ba, és ez lehetséges is (lásd ábra).

→	↓	←	→	→	→
→	↓	→	↑	→	→
↓	↓	↑	→	↑	↑
↓	↓	↑	↑	↑	→
↓	→	→	→	↑	↑
→	→	→	→	→	↑

D-7. Mindkét festéskor 1 kockának lesz befestve 3 lapja, 6 kockának lesz befestve 2 lapja és további 12 kockának lesz befestve 1 lapja. Ez azt jelenti, hogy minden olyan kockának, aminek végül legalább 3 lapja piros, annak az egyik festés során legalább két lapját festették le. Mivel 1-1 kockának egyből 3-3 lapja van befestve, ezért rajtuk kívül csak a maradék 6-6 olyan kocka lehet megfelelő, amiknek 2-2 lapja egyszerre lett befestve. Így tehát összesen legfeljebb 14 kocka lehet megfelelő. Ez pedig el is érhető, ha az előbb említett 1-1 kockának nem lesz több lapja festve, valamint a 6-6 kocka a másik festés során olyan, hogy még 1-1 lapjuk lefestésre került.

D-8. Ha Kristófnál van egy 3 dolláros, Zorkánál pedig egy 1 dolláros, akkor ha ezeket kicserélik, majd Kristóf visszaadja az 1 dollárost Zorkának, azt érik el, hogy a 3 dolláros gazdát cseréljen. Ha a Zorkánál nincs 1 dolláros, akkor ha először Kristóf ad neki, és ezután cserélik ki Kristóf 3 dollárosát Zorka 1 dollárosára, akkor ugyanúgy azt érik el, hogy a 3 dolláros gazdát cseréljen. Ezt persze fordítva is megtehetik, tehát ha kezdetben Zorkánál van 3 dolláros, el tudják érni, hogy ez Kristófhhoz kerüljön úgy, hogy a többi pénzük ne váltson gazdát.

Hasonlóan, ha Kristófnál van egy 5 dolláros, Zorkánál pedig egy 3 dolláros, ezeket kicserélve, majd az előbb leírt műveletet végrehajtva azt érik el, hogy az 5 dolláros gazdát cseréljen. Ha Zorkánál nincs 3 dolláros, akkor először végrehajtva a fenti műveleteket, majd kicserélve az 5 és a 3 dollárost, a kalózok el tudják érni, hogy az 5 dolláros cseréljen gazdát.

Így ezekkel a műveletekkel a kalózok bármikor adhatnak egymásnak 1, 3 és akár 5 dollárost is. Így tehát bármikor bármelyik pénzek lehetnek Zorkánál. A készlet az összesen eredetileg Zorkánál és Kristófnál levő pénzek, azaz egy 1 dolláros, két 3 dolláros és három 5 dolláros. Az ebből alkotható összegek a következők:

0, ha Zorkánál nincs semmi.

1, ha Zorkánál csak az 1 dolláros van.

3, ha Zorkánál csak egy 3 dolláros van.

$$1 + 3 = 4$$

5, ha Zorkánál csak egy 5 dolláros van.

$$1 + 5 = 6$$

$$1 + 3 + 3 = 7$$

$$3 + 5 = 8$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$5 + 5 = 10$$

$$1 + 5 + 5 = 11$$

$$1 + 3 + 3 + 5 = 12$$

$$3 + 5 + 5 = 13$$

$$1 + 3 + 5 + 5 = 14$$

$$5 + 5 + 5 = 15$$

$$1 + 5 + 5 + 5 = 16$$

$$1 + 3 + 3 + 5 + 5 = 17$$

$$3 + 5 + 5 + 5 = 18$$

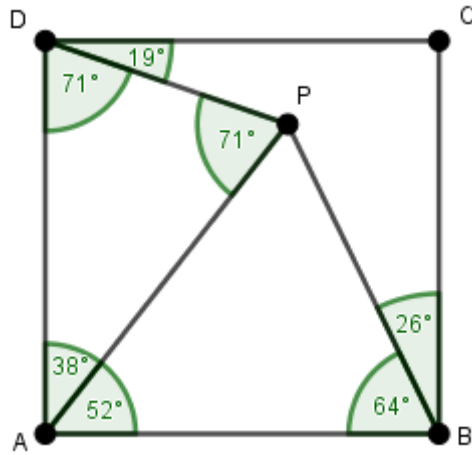
$$1 + 3 + 5 + 5 + 5 = 19$$

$$3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 21$$

$$1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 22$$

Világos, hogy maximum 22 dollár lehet Zorkánál, 2 pedig nem lehet nála, ehhez kettő darab 1 dolláros kellene. Ugyanígy 20 sem lehet nála, hiszen ekkor Kristófnál kellene, hogy 2 legyen. Ez pedig 21 lehetőség, így Zorka lapján legfeljebb 21 különböző szám lehet.

D-9. Tudjuk, hogy $\angle PAD = 90^\circ - \angle PAB = 38^\circ$, valamint $\angle ADP = 90^\circ - \angle CDP = 71^\circ$. Vegyük észre, hogy ekkor az ADP háromszög szögeinek összege miatt $\angle DPA = 71^\circ$, vagyis az ADP háromszög egyenlőszárú és $AP = AD$. Továbbá $AD = DB$ a négyzet oldalai, ezért az ABP háromszög is egyenlőszárú, vagyis $\angle ABP = \angle APB$. Ekkor viszont az ABP háromszög szögeinek összege miatt $\angle PBA = \frac{180^\circ - \angle PAB}{2} = 64^\circ$, vagyis $\angle PBC = 90^\circ - \angle PBA = 26^\circ$.



D-10. (Játék) Nevezzünk *nyerőnek* egy n számot, ha az n zsetonból álló kupac esetén a soron következő játékos nyerni tud. (Különböen pedig nevezzük az n számot *vesztőnek*.)

Világos, hogy 1 nyerő.

A 2 vesztő, mert akár elveszünk egy zsetont, akár megfelezzük a kupacot, mindenképp 1 zseton marad, ahonnan a másik játékos nyer.

A 3 nyerő, mert egy zsetont elvéve a 2-re jutunk, ahonnan a másik játékos veszít, azaz mi nyerünk.

Ezek után teljes indukciót használva bebizonyítjuk, hogy egy tetszőleges 3-nál nagyobb n szám akkor és csak akkor nyerő, ha páros.

Az $n = 4$ állásról rá tudunk lépni a vesztő 2-re (a kupacot megfelelve), így az nyerő. Most legyen $n \geq 5$. Tekintsük az alábbi két esetet n paritása szerint:

- Ha n páros, akkor egy zsetont elvéve rá tudunk lépni az $n - 1$ -re, ami páratlan. De az indukciós feltevés szerint az $n - 1$ vesztő, így az n nyerő.
- Ha n páratlan, akkor csak egy zsetont vehetünk el (ahogy a kupacot nem tudjuk megfelelni), így az $n - 1$ -re lépünk, ami páros. De itt az indukciós feltevés szerint az $n - 1$ nyerő, így az n vesztő.

Ezzel a leírással tehát minden lehetséges számról eldöntöttük, hogy onnan kezdeni érdemes, vagy másodikként játszani, valamint a nyerő stratégiát is megadtuk.