XVII. DÜRER VERSENY

ONLINE FORDULÓ 2023. OKTÓBER 19.

MEGOLDÓKULCS

Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
8	3552	4	720	18	14	21	26	2727

Részletes megoldások

E-1. Álljon az eredeti legénység n tagból, akiknek így összesen $1{,}75n = \frac{7}{4}n$ lábuk van. Az új majom megérkezése után az $n+1$ tagnak összesen $\frac{7}{4}n + 4$ lába van, tehát az új átlagos lábszám $\frac{\frac{7}{4}n+4}{n+1} = 2$. Ekkor $2(n+1) = \frac{7}{4}n + 4$, amiből $2n + 2 = \frac{7}{4}n + 4$, vagyis $\frac{1}{4}n = 2$, tehát $n = 8$.

E-2. Kezdetben a matrózokat ne különböztessük meg egymástól, és csak azt számoljuk, hogy a két állomás mely időtartamokban foglalt; majd a megoldás végén szorozzunk fel $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-gyel, hiszen ennyiféleképpen helyezhetjük el a matrózokat a kijelölt helyekre és idősávokba. Vizsgáljuk a két állomást az ott jelző matrózok darabszáma szerint:

(i) Ha az északi állomáson 3 matróz küld füstjelet, akkor az ő időbeosztásuk 4-féle lehet, hiszen a 8 és 15 óra közötti 7 órából 6 órát kitöltenek, és az 1 óra, amikor az állomás szabad, lehet az első matróz előtt, az első és második matróz között, a második és harmadik matróz között, vagy a harmadik matróz után. Eközben a déli állomáson az ott jelző matróz 8 és 13 óra között bármely egész órában elkezdheti a jelzést: ez 6 eset. Mivel a két helyen történt események függetlenek, így az esetszámok szorzatát vesszük: $4 \cdot 6 = 24$.

(ii) Ha a déli állomáson küld 3 matróz füstjelet, akkor ugyanígy 24 esetet kapunk.

(iii) Ha 2-2 matróz jelez a két állomáson, akkor északon a két matróz jelzésének kezdete lehet: 8 és 10, 8 és 11, 8 és 12, 8 és 13, 9 és 11, 9 és 12, 9 és 13, 10 és 12, 10 és 13, vagy 11 és 13 óra. A déli állomáson is ugyanezek a variációk lehetnek, így összesen $10 \cdot 10 = 100$ ilyen eset van.

Így a matrózok összesen $(24 + 24 + 100) \cdot 24 = 3552$-féleképpen jelezhetnek.

E-3. A feladat igazából azt kéri, hogy a 16 szektorba tegyünk minél kevesebb kincset úgy, hogy bármely szektorra igaz legyen, hogy abban, vagy legalább az egyik oldalszomszédjában kincs legyen. Vegyük észre, hogy a tenger bármelyik két sarkára igaz az, hogy nem lehet olyan kincs, ami mindkettővel szomszédos. Emiatt mind a 4 sarokhoz kell legalább 1-1 kincs, vagyis legalább 4 kincset le kell tennünk. Ez meg is valósítható például az ábrának megfelelően, ahol a K betűk jelölik a kincseket.

		K	
K			
			K
	K		

E-4. Helyezze le Alex a ládákat a legnagyobbtól a legkisebb felé haladva, és eközben végig kövessük nyomon, hogy hány szabad rekesz van a következő láda lehelyezésére.

A legnagyobb ládát 1-féleképpen rakhatja le, és 2 lehetséges rekesz van (az aranyos és az ezüstös rekesze), ahova a következő láda tehető. A következő ládát tehát 2-féleképpen rakhatja le, és annak lerakásakor a szabad rekeszek száma 1-gyel nő (mert egy rekeszt elfoglal az új láda, de az új ládának két rekesze van, melyek a további ládák számára megnyílnak lehetőségként). Ugyanígy minden további láda lerakásakor a szabad rekeszek száma mindig 1-gyel nő, tehát minden láda lehelyezésére eggyel több opció van, mint az előzőére. Így a lehetőségek száma összesen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

E-5. Minden mezőbe írjunk olyan nyilat, ami éppen a szél irányába mutat. Mivel az X-ből induló hajó B mezőbe jutott, így létezik egy út nyilakból X-ből B-be. Ez az út a két végponttal együtt legalább 7 négyzetből áll (3 jobbra és 3 felfelé nyíl, plusz a B mező). Ha bárhol becsatlakozunk egy útba, akkor onnantól nem tudunk letérni róla, csak a vonalát követhetjük. Tehát ha bármely mezőből A-ba szeretnénk jutni, akkor az utunknak nem lehet közös mezője (azaz nem metszhetik egymást) sem az X $\rightarrow$ B, sem az Y $\rightarrow$ C úttal.

Ez azt jelenti, hogy az Y $\rightarrow$ C út alatti négyzetekből biztosan nem lehet eljutni A-ba. Így akkor kapjuk a lehető legtöbb olyan mezőt, amiből A-ban kötünk ki, ha az Y $\rightarrow$ C út az ábrán látható módon a térkép alsó szélén fut.

					B
					A
Y					
$\downarrow$		X			C
$\downarrow$					$\uparrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$

Így végül $36 - 7 - 11 = 18$ mező marad, ahonnan el lehet jutni A-ba, és ez lehetséges is (lásd ábra).

$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\downarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$
$\downarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$

E-6. Mindkét festéskor 1 kockának lesz befestve 3 lapja, 6 kockának lesz befestve 2 lapja és további 12 kockának lesz befestve 1 lapja. Ez azt jelenti, hogy minden olyan kockának, aminek végül legalább 3 lapja piros, annak az egyik festés során legalább két lapját festették le. Mivel 1-1 kockának egyből 3-3 lapja van befestve, ezért rajtuk kívül csak a maradék 6-6 olyan kocka lehet megfelelő, amiknek 2-2 lapja egyszerre lett befestve. Így tehát összesen legfeljebb 14 kocka lehet megfelelő. Ez pedig el is érhető, ha az előbb említett 1-1 kockának nem lesz több lapja festve, valamint a 6-6 kocka a másik festés során olyan, hogy még 1-1 lapjuk lefestésre került.

E-7. Ha Kristófnál van egy 3 dolláros, Zorkánál pedig egy 1 dolláros, akkor ha ezeket kicserélik, majd Kristóf visszaadja az 1 dollárost Zorkának, azt érik el, hogy a 3 dolláros gazdát cseréljen. Ha a Zorkánál nincs 1 dolláros, akkor ha először Kristóf ad neki, és ezután cserélik ki Kristóf 3 dollárosát Zorka 1 dollárosára, akkor ugyanúgy azt érik el, hogy a 3 dolláros gazdát cseréljen. Ezt persze fordítva is megtehetik, tehát ha kezdetben Zorkánál van 3 dolláros, el tudják érni, hogy ez Kristófhoz kerüljön úgy, hogy a többi pénzük ne váltson gazdát.

Hasonlóan, ha Kristófnál van egy 5 dolláros, Zorkánál pedig egy 3 dolláros, ezeket kicserélve, majd az előbb leírt műveletet végrehajtva azt érik el, hogy az 5 dolláros gazdát cseréljen. Ha Zorkánál nincs 3 dolláros, akkor először végrehajtva a fenti műveleteket, majd kicserélve az 5 és a 3 dollárost, a kalózok el tudják érni, hogy az 5 dolláros cseréljen gazdát.

Így ezekkel a műveletekkel a kalózok bármikor adhatnak egymásnak 1, 3 és akár 5 dollárost is. Így tehát bármikor bármelyik pénzek lehetnek Zorkánál. A készlet az összesen eredetileg Zorkánál és Kristófnál levő pénzek, azaz egy 1 dolláros, két 3 dolláros és három 5 dolláros. Az ebből alkotható összegek a következők:

0, ha Zorkánál nincs semmi.

1, ha Zorkánál csak az 1 dolláros van.

3, ha Zorkánál csak egy 3 dolláros van.

$1 + 3 = 4$

5, ha Zorkánál csak egy 5 dolláros van.

$1 + 5 = 6$

$1 + 3 + 3 = 7$

$3 + 5 = 8$

$1 + 3 + 5 = 9$

$5 + 5 = 10$

$1 + 5 + 5 = 11$

$1 + 3 + 3 + 5 = 12$

$3 + 5 + 5 = 13$

$1 + 3 + 5 + 5 = 14$

$5 + 5 + 5 = 15$

$1 + 5 + 5 + 5 = 16$

$1 + 3 + 3 + 5 + 5 = 17$

$3 + 5 + 5 + 5 = 18$

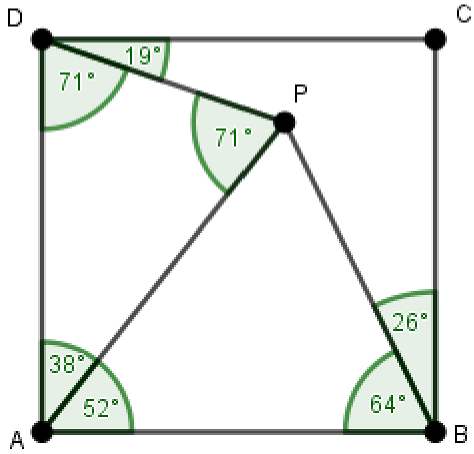
$1 + 3 + 5 + 5 + 5 = 19$

$3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 21$

$1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 22$

Világos, hogy maximum 22 dollár lehet Zorkánál, 2 pedig nem lehet nála, ehhez kettő darab 1 dolláros kellene. Ugyanígy 20 sem lehet nála, hiszen ekkor Kristófnál kellene, hogy 2 legyen. Ez pedig 21 lehetőség, így Zorka lapján legfeljebb 21 különböző szám lehet.

E-8. Tudjuk, hogy $PAD\sphericalangle = 90° - PAB\sphericalangle = 38°$, valamint $ADP\sphericalangle = 90° - CDP\sphericalangle = 71°$. Vegyük észre, hogy ekkor az ADP háromszög szögeinek összege miatt $DPA\sphericalangle = 71°$, vagyis az ADP háromszög egyenlőszárú és $AP = AD$. Továbbá $AD = DB$ a négyzet oldalai, ezért az ABP háromszög is egyenlőszárú, vagyis $ABP\sphericalangle = APB\sphericalangle$. Ekkor viszont az ABP háromszög szögeinek összege miatt $PBA\sphericalangle = \frac{180° - PAB\sphericalangle}{2} = 64°$, vagyis $PBC\sphericalangle = 90° - PBA\sphericalangle = 26°$.



E-9. Az eredeti kódban vagy 4 különböző számjegy van, vagy 3 különböző, vagy 2 különböző úgy, hogy mindkettőből 2-t tartalmaz a szám, vagy az egyikből egyet, a másikból hármat, vagy mind a négy jegy azonos. Mindegyik esetben a lehetséges számokat felírva látjuk, hogy az összegből kiemelhető 1111, azaz ezzel osztható az összeg. Így maga a szám osztható 101-gyel, azaz $\overline{abab}$ alakúnak kell lennie. Ekkor a számok összege $\overline{abab}+\overline{abba}+\overline{aabb}+\overline{baba}+\overline{bbab}+\overline{baab}=3333(a+b)$, azaz $303(a+b)=\overline{abab}$. Mivel a bal oldal osztható 3-mal, így a jobb oldal is, ami a hárommal való osztási szabály miatt azt jelenti, hogy $2a+2b$ osztható 3-mal, azaz $a+b$ osztható 3-mal.

Ekkor a bal oldal osztható 9-cel, azaz a jobb oldal is, így a 9-cel való osztási szabály miatt $a+b$ is. Ekkor a bal oldal osztható $101 \cdot 27$-tel, azaz a jobb oldal is, igy a lehetséges kódok a 2727, a 5454 és a 8181. Ellenőrizhetjük, hogy ezek közül csak a 2727 felel meg a feltételnek.

E-10. (Játék) Nevezzünk *nyerőnek* egy n számot, ha az n zsetonból álló kupac esetén a soron következő játékos nyerni tud. (Különben pedig nevezzük az n számot *vesztőnek*.)

Világos, hogy 1 nyerő.

A 2 vesztő, mert akár elveszünk egy zsetont, akár megfelezzük a kupacot, mindenképp 1 zseton marad, ahonnan a másik játékos nyer.

A 3 nyerő, mert egy zsetont elvéve a 2-re jutunk, ahonnan a másik játékos veszít, azaz mi nyerünk.

Ezek után teljes indukciót használva bebizonyítjuk, hogy egy tetszőleges 3-nál nagyobb n szám akkor és csak akkor nyerő, ha páros.

Az $n=4$ állásról rá tudunk lépni a vesztő 2-re (a kupacot megfelezve), így az nyerő. Most legyen $n \geq 5$. Tekintsük az alábbi két esetet n paritása szerint:

- Ha n páros, akkor egy zsetont elvéve rá tudunk lépni az $n-1$-re, ami páratlan. De az indukciós feltevés szerint az $n-1$ vesztő, így az n nyerő.

- Ha n páratlan, akkor csak egy zsetont vehetünk el (ahogy a kupacot nem tudjuk megfelezni), így az $n-1$-re lépünk, ami páros. De itt az indukciós feltevés szerint az $n-1$ nyerő, így az n vesztő.

Ezzel a leírással tehát minden lehetséges számról eldöntöttük, hogy onnan kezdeni érdemes, vagy másodikként játszani, valamint a nyerő stratégiát is megadtuk.