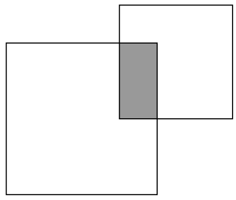
XVII. DÜRER VERSENY

C KATEGÓRIA

MEGOLDÁSOK

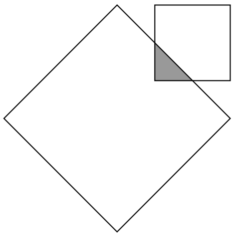
HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.

C1. Máté rajzolt két négyzetet, amelyek közös része egy sokszög.
a) Hány oldalú sokszög lehet a közös rész? Rajzoljatok példát minél többféle oldalszámra.
b) Hány derékszöge lehet a közös résznek? Rajzoljatok példát minél többféle számú derékszögre.
Például a jobb oldali ábrán a két négyzet közös része a szürke téglalap, amelynek 4 oldala és 4 derékszöge van.
A négyzetek mérete lehet különböző, és forgathatjátok is őket. Előfordulhat, hogy több hely áll rendelkezésetekre, mint ahány különböző eset létezik.

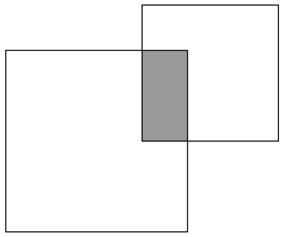


Megoldás: A megoldásban a közös részt metszetnek hívjuk.

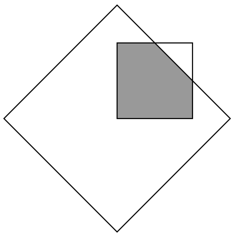
3 oldalú és 1 derékszögű metszet:



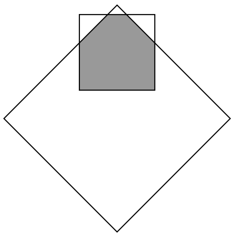
4 oldalú és 4 derékszögű metszet:



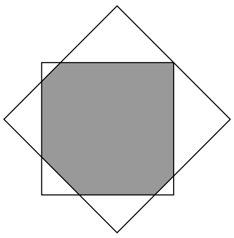
5 oldalú és 3 derékszögű metszet:



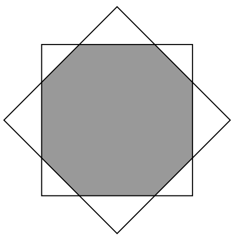
6 oldalú és 2 derékszögű metszet:



7 oldalú metszet:



8 oldalú és 0 derékszögű metszet:



a) A fenti ábrák mutatják, hogy lehet példát rajzolni $3, 4, 5, 6, 7, 8$ oldal esetén. Világos, hogy 3-nál kevesebb oldala nem lehet a metszetnek, mivel minden sokszögnek legalább 3 oldala van. Továbbá mivel a négyzet konvex, így tetszőleges egyenes legfeljebb két pontban metszi a kerületét. Emiatt, ha az egyik négyzetet lerögzítjük, akkor a másik négyzetet akárhogyan is helyezzük le, minden oldala legfeljebb két pontban metszi a rögzített négyzetet. Ez azt jelenti, hogy a két négyzet kerülete legfeljebb 8 pontban metszi egymást, azaz a metszetnek, mint sokszögnek, nem lehet 8-nál több csúcsa.

b) Látható a fenti ábrákon, hogy $0, 1, 2, 3, 4$ derékszög lehetséges. Megmutatjuk, hogy ennél több derékszög sosem elérhető. Minden konvex sokszög külső szögeinek összege $360°$. Egy derékszöghöz tartozó külső szög $90°$. A két négyzet metszete egy konvex sokszög, így tényleg nem lehet 4-nél több derékszög, mert akkor már csak a derékszögekhez tartozó külső szögek összege is nagyobb lenne, mint $360°$.

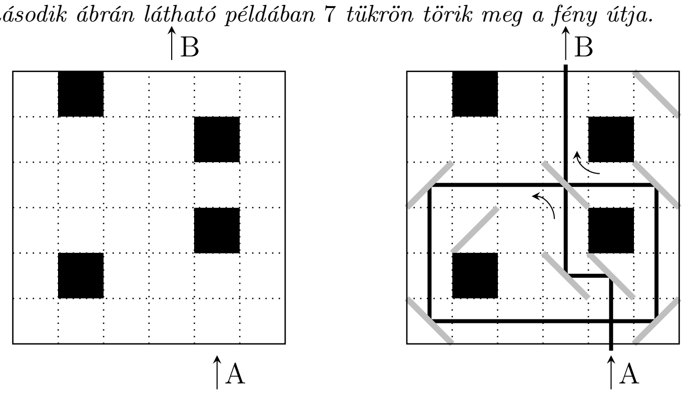
C2. Mesi úgy gondolta, hogy túl sok Túró Rudit eszik, ezért egy héten hétfőtől vasárnapig diétázni próbált. Akkor nevezte sikeresnek a diétája egy napját (keddtől kezdve), ha aznap kevesebb Túró Rudit evett meg, mint az azt megelőző napon. Tudjuk, hogy csak egy napon nem volt sikeres a diétája. Soroljátok fel az összes lehetőséget, hogy hány Túró Rudit ehetett meg a hét napjain, ha Mesi minden nap $0, 1, 2$ vagy 3 Túró Rudit evett.
Például, ha Mesi $3, 2, 0, 3, 2, 1, 0$ *Túró Rudit evett meg a hét napjain, akkor csak csütörtökön nem volt sikeres a diétája. A válaszaitokat a Válaszlapra oszloponként írjátok. Előfordulhat, hogy több oszlop áll rendelkezésetekre, mint ahány megoldás létezik.*

Megoldás: Mesi diétája legfeljebb négy napig lehet hétfőtől kezdve sikeres, ha $3, 2, 1, 0$ Túró Rudit eszik. Tehát legkésőbb pénteken nem lesz sikeres a diétája. Hasonlóan, legkorábban csütörtökön nem lesz sikeres a diétája, mert vasárnapig bezárólag a $3, 2, 1, 0$ lehet a leghosszabb sikeres sorozat. Tehát csak csütörtök vagy péntek lehet az a nap, amikor nem sikeres a diéta. Így a négy napos sikeres sorozatban $3, 2, 1, 0$-t eszik, a másikban pedig $3, 2, 1, 0$-t valamelyik számot kihagyva. Tehát a lehetséges sorozatok:

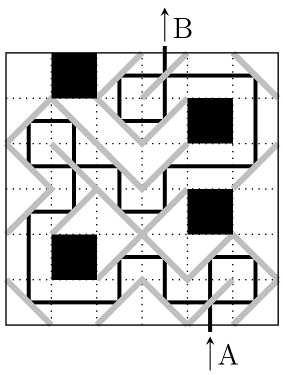
$2, 1, 0, 3, 2, 1, 0$
$3, 1, 0, 3, 2, 1, 0$
$3, 2, 0, 3, 2, 1, 0$
$3, 2, 1, 3, 2, 1, 0$
$3, 2, 1, 0, 2, 1, 0$
$3, 2, 1, 0, 3, 1, 0$
$3, 2, 1, 0, 3, 2, 0$
$3, 2, 1, 0, 3, 2, 1$

C3. Az alábbi ábrán a kalózok múzeumában található tükörterem alaprajzát láthatjátok. A teremben 4 fekete mezővel jelölt oszlop található, a maradék rész pedig 32 négyzet alakú részre van felosztva, amikre átlós irányba tükröket lehet helyezni. A tükrök mindkét oldala derékszögben töri meg a rá érkező fény útját. A teremben a tükrök jelenleg úgy helyezkednek el, hogy ha az A nyíl mentén bevilágítunk egy lámpával, akkor a fény a B nyíl mentén távozik a teremből. Mutassatok példát, amiben minél több tükrön pattan meg a fény. A Válaszlapra a lent látható példához hasonlóan rajzoljátok le a tükröket és a fény útját is.

A lámpa fénye keresztezheti önmagát. A fény egy tükör mindkét oldalán megpattanhat, de ebben az esetben is csak egyszer számoljuk ezt a tükröt. A második ábrán látható példában 7 tükrön törik meg a fény útja.



Megoldás:



Azokra a mezőkre, amelyekben nem szerepel tükör ebben a konstrukcióban (7 ilyen mező van), nem is kerülhet olyan tükör, amelyiken megtörik a fény útja. Ez amiatt van, mert ekkor a fény vagy beleütközne egy oszlopba, vagy máshol távozna a teremből. Tehát a lehető legtöbb tükröt ezen a módon tudjuk lehelyezni, ezek száma 25.

C4. Adjatok meg három különböző pozitív egyjegyű számot úgy, hogy belőlük a négy alapművelet és zárójelek segítségével az $1, 2, \ldots, 10$ számok közül a lehető legtöbbet elő lehessen állítani, ha minden előállításban mindhárom számjegyet pontosan egyszer használhatjátok. A Válaszlapra írjátok le a három kiválasztott számjegyet és minél több szám előállítását belőlük.

Például ha a $2, 3, 7$ *számjegyeket választjátok, akkor szabályos előállítás az* $1 = -(2 \cdot 3) + 7$*, valamint az* $5 = (7 + 3)/2$ *is. A műveleteket csak az egyjegyű számokkal szabad végezni, tehát például a* $9 = 27/3$ *nem megengedett.*

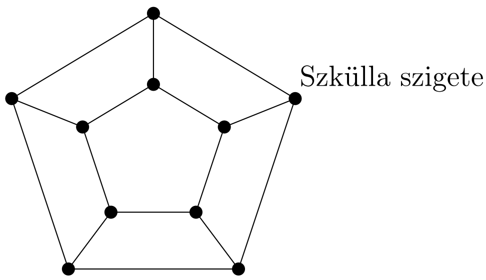
Megoldás: Legyen a három szám az 1, 2, 4. Ezek segítségével elő tudjuk állítani mind a tíz számot a következőképpen.

$1 = 4 - 2 - 1$
$2 = 4/2 \cdot 1$
$3 = 4 + 1 - 2$
$4 = 4/(2 - 1)$
$5 = 4 + 2 - 1$
$6 = 4 + 2/1$
$7 = 4 + 2 + 1$
$8 = 4 \cdot 2 \cdot 1$
$9 = 4 \cdot 2 + 1$
$10 = 2 \cdot (4 + 1)$

Megjegyzés: A kíváncsi olvasó jogosan kérdezheti, hogy "Oké, oké, szuper, hogy ez a legjobb megoldás, mert itt mind a tíz számot elő lehet állítani, de erre hogyan lehet rájönni?" Erre mi sem tudunk teljesen precíz választ adni. Ha az ember sokat próbálkozik, akkor érezhető, hogy kisebb számokkal egyszerűen több mindent ki lehet rakni. Az $1, 2, 3$ is csábító jelöltnek tűnik, de ezzel az a baj, hogy a 10 már túl nagy, és nem lehet megcsinálni vele. De azért ez sem rossz, a többi kilenc szám mind kikombinálható. Egyébként nincs másik olyan számhármas az $1, 2, 4$-en kívül, amivel mindent ki lehet rakni.

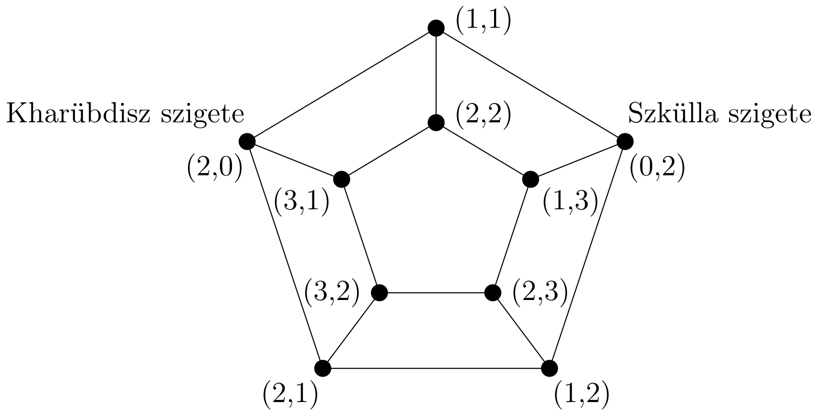
Ennél a feladatnál nem azt vártuk el a csapatoktól, hogy megtalálják ezt, tehát a legjobb megoldást. Valószínűnek tartottuk, hogy még a legjobb csapatok között is nagyon kevesen fognak erre rájönni. Ám a matematika ilyen, sokszor a matematikusnak is esélytelen, hogy egy megoldatlan problémára megtalálja a legjobb választ. Ilyenkor megpróbál minél jobb megoldást találni. A csapatoknak is ez volt itt a feladata, minél több számot sikerült előállítania egy csapatnak, annál több pontot szerzett.

C5. Az alábbi térképen a Dürerenciás Tenger tíz szigete látható, amelyek egyike egy kincset rejt. Két sziget pontosan akkor van összekötve az ábrán, ha üzemel köztük közvetlen hajóút. Minden hajóúton mindkét irányban közlekednek hajók. Leilának minden szigeten lakik egy ismerőse, a segítségükkel szeretné megszerezni a kincset. Mielőtt Leila elutazik a szigetcsoportra, szeretne biztosra menni, ezért telefonon beszél néhány ismerősével. Ha Leila felhívja egy ismerősét, ő csak azt árulja el neki, hogy legkevesebb hány hajóúttal érhető el az ő szigetéről a kincses sziget. Legalább hány ismerősét kell felhívnia, hogy biztosan meg tudja mondani, hogy melyik sziget rejti a kincset, ha tudjuk, hogy először a Szküllla szigetén lakó Lilit hívja fel?

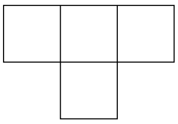


Megoldás: Leilának csak Szküllára telefonálnia nyilván nem elég, mert ha például onnan egy hajóútnyira van a kincs, akkor nem tudja eldönteni, hogy melyik szomszédos szigeten van.

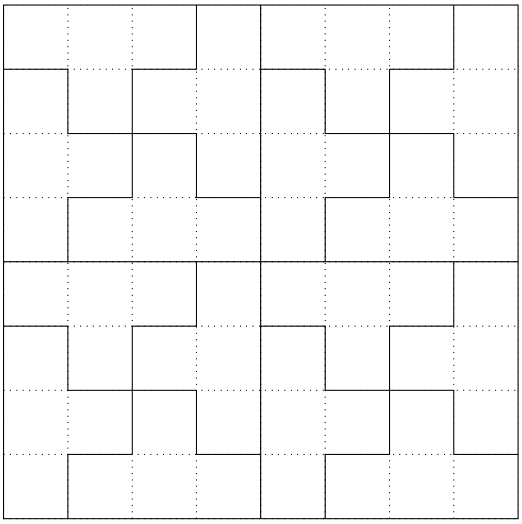
Nevezzük az ábrán leginkább balra lévő szigetet Kharübdisz szigetének. Belátjuk, hogy Leilának elég Szkülla és Kharübdisz szigetére telefonálnia, és a szerzett információk alapján már egyértelműen meg tudja határozni a kincses szigetet. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor igaz, hogyha bármlyik két szigetre igaz, hogy vagy Szküllától, vagy Kharübdisztól nem ugyanannyi hajózásra vannak. Az ábrán minden szigethez odaírtunk két számot, az első mindig az, hogy Szküllától legkevesebb hány hajózás kell, hogy odajussunk, a második pedig hogy Kharübdisztól hány hajózás kell. Látható, hogy tényleg nincs két olyan sziget, ami mellé pont ugyanazt a számpárt írtuk. Tehát Szküllát és Kharübdiszt felhívva Leila tényleg egyértelműen meg tudja határozni a kincses szigetet, így a feladatra kettő a válasz.



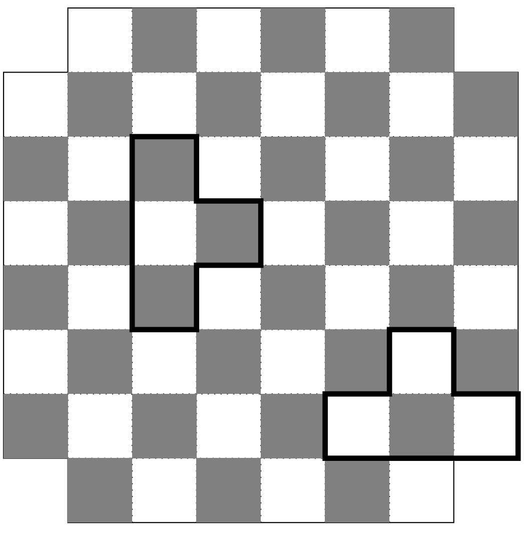
C6. **a)** Egy 8×8 mezőből álló táblázatot szeretnénk lefedni. Ehhez az ábrán látható *T-tetrominónak* szeretnénk használni 16 példányát. Lehetséges-e ez, ha a tetrominók nem fedhetik át egymást és nem is lóghatnak le a tábláról? Ha igen, akkor adjatok meg egy ilyen lefedést, ha nem, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem.
b) Hagyjuk el a 8×8-as táblázatnak a 4 sarokmezőjét. Lefedhető-e az így kapott ábra hasonló módon 15 darab T-tetrominóval? Ha igen, akkor adjatok meg egy ilyen lefedést, ha nem, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem.
A T-tetrominók forgathatók, de minden mezőjüknek illeszkednie kell a táblázat egy-egy mezőjére.



Megoldás: **a)** Igen, lehetséges, például így.

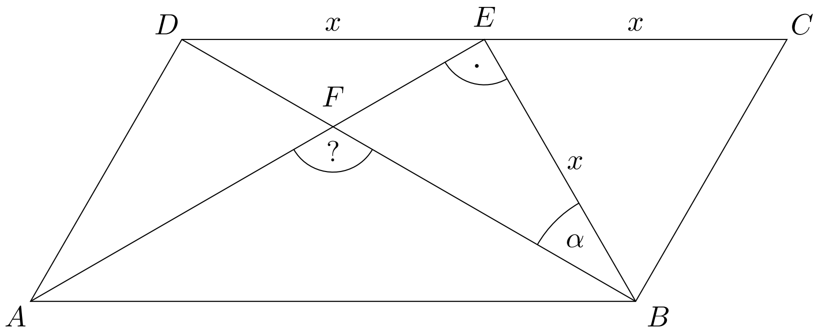


b) Színezzük ki sakktáblaszerűen a táblát. Így a tábla 30 fekete és 30 fehér mezőből áll. Akárhogyan is rakunk le egy T-tetrominót, az mindig vagy 3 fekete és 1 fehér mezőt fed, vagy 1 fekete és 3 fehér mezőt fed. Mivel a táblán a fekete és fehér mezőkből azonos számú van, ezért ugyanannyi 3 fekete és 1 fehér mezőre illeszkedő T-tetrominót kell leraknunk, mint ahány 1 fekete és 3 fehér mezőre illeszkedőt. Ám a T-tetrominók száma 15, ami páratlan, így ez nem lehetséges. Tehát nem lehet lefedni T-tetrominókkal ezt a táblát.



C7. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen a CD oldal felezőpontja E. Legyen az AE és BD szakaszok metszéspontja F. Tegyük fel, hogy az AEB szög derékszög, és $EB = ED$. Számoljátok ki az AFB szöget.

Megoldás:



Legyen a DBE szög egyenlő α-val. Tudjuk, hogy DEB háromszög egyenlőszárú, mert $EB = ED = x$, vagyis $BDE\sphericalangle = DBE\sphericalangle = \alpha$. Mivel a BDE és ABD szögek váltószögek, ezért $ABD\sphericalangle = \alpha$.

Mivel E felezi a CD oldalt, így $ED = EC = x$, amiből $CD = 2x$. Tudjuk, hogy $ABCD$ paralelogramma, ezért $AB = CD = 2x$, tehát az AEB derékszögű háromszög EB befogója fele olyan hosszú, mint az AB átfogó, vagyis AEB félszabályos háromszög. Emiatt $ABE\sphericalangle = 2\alpha = 60°$, vagyis $\alpha = 30°$, míg $EAB\sphericalangle = 30°$.

Most tekintsük az AFB háromszög szögeit, majd rendezzük az egyenletet a kérdéses szögre:

$$AFB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 30° = 120°.$$