XVII. DÜRER VERSENY

D KATEGÓRIA

FELADATSOR **HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.**

Rövid válaszos feladatok

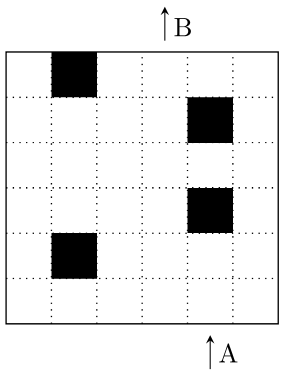
Az 1-4. feladatok megoldását a Válaszlapon a feltüntetett helyekre írjátok, indokolni nem kell őket. Ezek a feladatok 6-6 pontot érnek, és részpontszám is szerezhető rájuk.

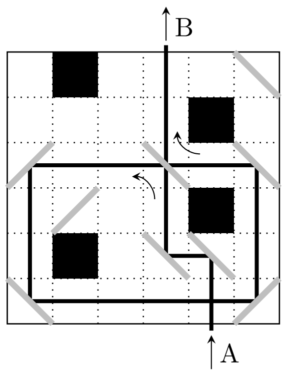
1. Egy 4×4-es táblázat kitöltését *varázslatosnak* hívjuk, ha

- minden mezőjében a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike szerepel,
- minden számjegy szerepel benne legalább egyszer,
- valamint minden sorban és oszlopban ugyanannyi a számjegyek összege.

Adjatok meg egy varázslatos kitöltést, ahol a táblázatba írt számjegyek összege a lehető legkisebb.

2. Az alábbi ábrán a kalózok múzeumában található tükörterem alaprajzát láthatjátok. A teremben 4 fekete mezővel jelölt oszlop található, a maradék rész pedig 32 négyzet alakú részre van felosztva, amikre átlós irányba tükröket lehet helyezni. A tükrök mindkét oldala derékszögben töri meg a rá érkező fény útját. A teremben a tükrök jelenleg úgy helyezkednek el, hogy ha az A nyíl mentén bevilágítunk egy lámpával, akkor a fény a B nyíl mentén távozik a teremből. Mutassatok példát, amiben minél több tükrön pattan meg a fény. A Válaszlapra a lent látható példához hasonlóan rajzoljátok le a tükröket és a fény útját is.
A lámpa fénye keresztezheti önmagát. A fény egy tükör mindkét oldalán megpattanhat, de ebben az esetben is csak egyszer számoljuk ezt a tükröt. A második ábrán látható példában 7 tükrön törik meg a fény útja.





3. Adjatok meg három különböző pozitív egyjegyű számot úgy, hogy belőlük a négy alapművelet és zárójelek segítségével az $1, 2, \ldots, 10$ számok közül a lehető legtöbbet elő lehessen állítani, ha minden előállításban mindhárom számjegyet pontosan egyszer használhatjátok. A Válaszlapra írjátok le a három kiválasztott számjegyet és minél több szám előállítását belőlük.
Például ha a $2, 3, 7$ *számjegyeket választjátok, akkor szabályos előállítás az* $1 = -(2 \cdot 3) + 7$*, valamint az* $5 = (7 + 3)/2$ *is. A műveleteket csak az egyjegyű számokkal szabad végezni, tehát például a* $9 = 27/3$ *nem megengedett.*

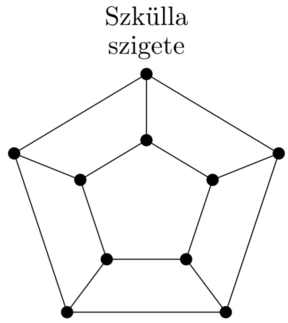
4. Amikor Jóska belépett az osztályterembe, a táblán néhány, nem feltétlenül különböző pozitív egész számot látott, melyek között szerepelt két olyan különböző szám, amik legnagyobb közös osztója nem az 1. Ezután mindegyik szám alá odaírta, hogy eredetileg hányszor szerepelt olyan szám a táblán, amivel a legnagyobb közös osztója az 1. Észrevette, hogy mindegyik szám alá éppen önmagát írta. Mutassatok minél kevesebb számból álló példát, amit Jóska érkezésekor láthatott a táblán.
Minden számot annyiszor írjatok le, ahányszor kezdetben szerepelt a táblán.

Kifejtős feladatok

*Az 5-7. feladatok megoldását külön-külön lapra írjátok, részletesen indokolva a megoldás menetét. Minden lapon szerepeljen a **csapatnév**, a **kategória** és a **feladat sorszáma**. Ezek a feladatok 12-12 pontot érnek.*

5. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen a CD oldal felezőpontja E. Legyen az AE és BD szakaszok metszéspontja F. Tegyük fel, hogy az AEB szög derékszög, és $EB = ED$. Számoljátok ki az AFB szöget.

6. a) A jobb oldali térképen a Dürerenciás Tenger tíz szigete látható, amelyek egyike egy kincset rejt. Két sziget pontosan akkor van összekötve az ábrán, ha üzemel köztük közvetlen hajóút. Minden hajóúton mindkét irányban közlekednek hajók. Leilának minden szigeten lakik egy ismerőse, a segítségükkel szeretné megszerezni a kincset. Mielőtt Leila elutazik a szigetcsoportra, szeretne biztosra menni, ezért telefonon beszél néhány ismerősével. Ha Leila felhívja egy ismerősét, ő csak azt árulja el neki, hogy legkevesebb hány hajóúttal érhető el az ő szigetéről a kincses sziget. Legalább hány ismerősét kell felhívnia, hogy biztosan meg tudja mondani, hogy melyik sziget rejti a kincset, ha tudjuk, hogy először a Szkülla szigetén lakó Lilit hívja fel?



b) Leila most egy öt szigetből álló szigetcsoportot szemelt ki. Sikerült megtudnia, hogy melyik szigetek között üzemelnek hajóutak. Kis gondolkodás után megállapította, hogy biztosan meg tudja határozni a kincses szigetet, ha felhívja egymás után két, különböző szigeten élő ismerősét. Ezek alapján legfeljebb hány hajóút futhat a szigetek között?

A feltételek megegyeznek az előző részben leírtakkal: az egyik sziget kincset rejt, minden szigeten van egy ismerőse, akit fel tud hívni, hogy megtudja, hogy az adott szigetről legkevesebb hány hajózással lehet a kincses szigetre jutni. Bármely két sziget között legfeljebb egy közvetlen hajóút vezet, és a hajóutakon mindig mindkét irányban közlekedik hajó. Továbbá még azt is tudjuk, hogy minden szigetről minden másik szigetet el lehet érni hajózás segítségével.

7. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ valós számokra teljesül, hogy

- $a_{2023} = a_1$,
- és minden $n \geq 3$-ra $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} - 1$, vagyis a harmadik számtól kezdve minden szám az előző két szám átlagánál eggyel kisebb.

Bizonyítsátok be, hogy $a_n \geq a_1$ teljesül minden $1 \leq n \leq 2023$-ra.

A versenyen összesen 60 pont szerezhető, és a feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!

A XVII. Dürer Verseny szervezői