D1. Egy 4×4-es táblázat kitöltését *varázslatosnak* hívjuk, ha

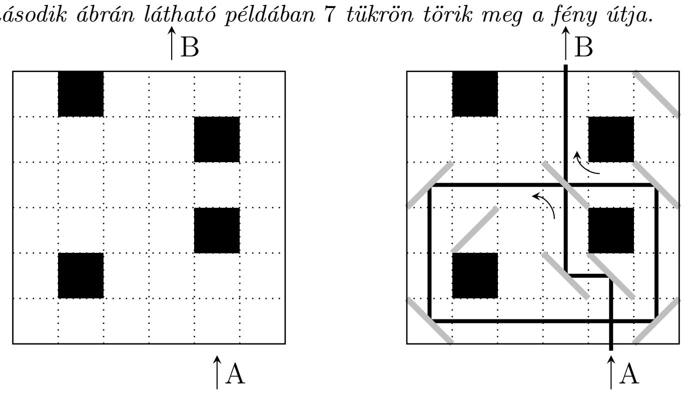
- minden mezőjében a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike szerepel,
- minden számjegy szerepel benne legalább egyszer,
- valamint minden sorban és oszlopban ugyanannyi a számjegyek összege.

Adjatok meg egy varázslatos kitöltést, ahol a táblázatba írt számjegyek összege a lehető legkisebb.

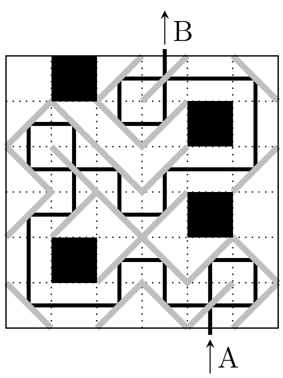
Megoldás: Mivel minden számjegynek szerepelnie kell legalább egyszer, így az összeg legalább $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Mivel mind a négy oszlopban ugyanaz az összeg, ezért az összes szám összege a táblázatban osztható néggyel, így legalább 48 (ahogy ez a legkisebb olyan 4-gyel osztható szám, ami nem kisebb 45-nél). Ekkor minden sorban és oszlopban 12 a számok összege. Ez meg is valósítható, például az alábbi ábra szerint.

9	3	0	0
2	8	1	1
0	0	7	5
1	1	4	6

D2. Az alábbi ábrán a kalózok múzeumában található tükörterem alaprajzát láthatjátok. A teremben 4 fekete mezővel jelölt oszlop található, a maradék rész pedig 32 négyzet alakú részre van felosztva, amikre átlós irányba tükröket lehet helyezni. A tükrök mindkét oldala derékszögben töri meg a rá érkező fény útját. A teremben a tükrök jelenleg úgy helyezkednek el, hogy ha az A nyíl mentén bevilágítunk egy lámpával, akkor a fény a B nyíl mentén távozik a teremből. Mutassatok példát, amiben minél több tükrön pattan meg a fény. A Válaszlapra a lent látható példához hasonlóan rajzoljátok le a tükröket és a fény útját is.
A lámpa fénye keresztezheti önmagát. A fény egy tükör mindkét oldalán megpattanhat, de ebben az esetben is csak egyszer számoljuk ezt a tükröt. A második ábrán látható példában 7 tükrön törik meg a fény útja.



Megoldás:



Azokra a mezőkre, amelyekben nem szerepel tükör ebben a konstrukcióban (7 ilyen mező van), nem is kerülhet olyan tükör, amelyiken megtörik a fény útja. Ez amiatt van, mert ekkor a fény vagy beleütközne egy oszlopba, vagy máshol távozna a teremből. Tehát a lehető legtöbb tükröt ezen a módon tudjuk lehelyezni, ezek száma 25.

D3. Adjatok meg három különböző pozitív egyjegyű számot úgy, hogy belőlük a négy alapművelet és zárójelek segítségével az $1, 2, \ldots, 10$ számok közül a lehető legtöbbet elő lehessen állítani, ha minden előállításban mindhárom számjegyet pontosan egyszer használhatjátok. A Válaszlapra írjátok le a három kiválasztott számjegyet és minél több szám előállítását belőlük.

Például ha a $2, 3, 7$ *számjegyeket választjátok, akkor szabályos előállítás az* $1 = -(2 \cdot 3) + 7$*, valamint az* $5 = (7 + 3)/2$ *is. A műveleteket csak az egyjegyű számokkal szabad végezni, tehát például a* $9 = 27/3$ *nem megengedett.*

Megoldás: Legyen a három szám az 1, 2, 4. Ezek segítségével elő tudjuk állítani mind a tíz számot a következőképpen.

$1 = 4 - 2 - 1$
$2 = 4/2 \cdot 1$
$3 = 4 + 1 - 2$
$4 = 4/(2 - 1)$
$5 = 4 + 2 - 1$
$6 = 4 + 2/1$
$7 = 4 + 2 + 1$
$8 = 4 \cdot 2 \cdot 1$
$9 = 4 \cdot 2 + 1$
$10 = 2 \cdot (4 + 1)$

Megjegyzés: A kíváncsi olvasó jogosan kérdezheti, hogy "Oké, oké, szuper, hogy ez a legjobb megoldás, mert itt mind a tíz számot elő lehet állítani, de erre hogyan lehet rájönni?" Erre mi sem tudunk teljesen precíz választ adni. Ha az ember sokat próbálkozik, akkor érezhető, hogy kisebb számokkal egyszerűen több mindent ki lehet rakni. Az $1, 2, 3$ is csábító jelöltnek tűnik, de ezzel az a baj, hogy a 10 már túl nagy, és nem lehet megcsinálni vele. De azért ez sem rossz, a többi kilenc szám mind kikombinálható. Egyébként nincs másik olyan számhármas az $1, 2, 4$-en kívül, amivel mindent ki lehet rakni.

Ennél a feladatnál nem azt vártuk el a csapatoktól, hogy megtalálják ezt, tehát a legjobb megoldást. Valószínűnek tartottuk, hogy még a legjobb csapatok között is nagyon kevesen fognak erre rájönni. Ám a matematika ilyen, sokszor a matematikusnak is esélytelen, hogy egy megoldatlan problémára megtalálja a legjobb választ. Ilyenkor megpróbál minél jobb megoldást találni. A csapatoknak is ez volt itt a feladata, minél több számot sikerült előállítania egy csapatnak, annál több pontot szerzett.

D4. Amikor Jóska belépett az osztályterembe, a táblán néhány, nem feltétlenül különböző pozitív egész számot látott, melyek között szerepelt két olyan különböző szám, amik legnagyobb közös osztója nem az 1. Ezután mindegyik szám alá odaírta, hogy eredetileg hányszor szerepelt olyan szám a táblán, amivel a legnagyobb közös osztója az 1. Észrevette, hogy mindegyik szám alá éppen önmagát írta. Mutassatok minél kevesebb számból álló példát, amit Jóska érkezésekor láthatott a táblán.
Minden számot annyiszor írjatok le, ahányszor kezdetben szerepelt a táblán.

Megoldás: A legkisebb lehetséges szám a 12. Egy 12 számból álló példa eredetileg táblán lévő számai: 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 11. Látható, hogy ez jó konstrukció, ahogy minden számhoz az értékével megegyező számú relatív prím másik számot találunk, és van két különböző, nem relatív prím szám is (például a 6 és a 9).

Belátjuk most, hogy legfeljebb 11 számból álló konstrukció nem létezik. Tegyük fel, hogy mégis van ilyen. A táblán nem lehetett 1-es szám. Az 1 ugyanis minden pozitív egészhez relatív prím, így ez alá ha 1-et írtunk, akkor összesen 1 szám volt a táblán, de ekkor nem is szerepelhetett két különböző szám.

Minden szám továbbá legfeljebb 10, hiszen legfeljebb 11 szám van, és önmagával senki sem relatív prím, mivel 1-es nincs a táblán. Így a lehetséges számok 2-től 10-ig terjednek.

Most belátjuk, hogy a táblán nem lehetett egyszerre két különböző szám, melyek pontosan ugyanazokat a prímtényezőket tartalmazzák. Tegyük fel, hogy mégis létezik két ilyen szám, a és b, melyre tehát $a \neq b$ és minden p prímre $p|a \Leftrightarrow p|b$. Ekkor minden x pozitív egészre igaz lesz, hogy $(x, a) = 1 \Leftrightarrow (x, b) = 1$, és így a és b pontosan ugyanazokhoz a számokhoz lesz relatív prím, így az alájuk írt számoknak azonosnak kellene lennie, ami ellentmondás. Emiatt nem lehet egyszerre több szám a táblán a {2, 4, 8}, valamint a {3, 9} halmazokból.

Ha a táblán nem lenne sem 6, sem 10, akkor minden szám a {2, 3, 4, 5, 7, 8, 9} halmazból kerülne ki. De ebben csak prímhatványok szerepelnek, és egy prím hatványai közül csak legfeljebb 1 szerepelhet, ezért bármely két különböző szám relatív prím lenne egymáshoz, ami a feltételnek ellentmond. Így szerepel 6 vagy 10 a táblán. 10 viszont csak úgy lehet, ha 11 szám van, és a 10-es minden másik számhoz relatív prím, tehát minden másik szám a {3, 7, 9}-ból kerül ki. De ekkor nem lehetne a feltételnek megfelelő két különböző, nem relatív prím szám, hiszen a 3 és 9 közül csak az egyik lehet, minden más számpár pedig relatív prím lenne egymáshoz. Így tehát 10 nem lehetett a táblán.

Tehát kell lennie 6-nak. Ekkor 2 nem lehetett, hiszen indirekten ha mégis lenne, akkor a 2 minden olyan számhoz relatív prím lenne, amivel a 6-os, mivel tetszőleges n-re $(n, 6) = 1 \Rightarrow (n, 2) = 1$. Emiatt viszont a 2-es alá írt szám legalább annyi lenne, mint a 6-os alá írt, ami ellentmondás. Ugyanígy nem lehetett sem 3-as, sem 4-es szám a táblán.

A táblán lévő számok így az {5, 6, 7, 8, 9}-ből kerülnek ki. Ha most minden i-re a_i-vel jelöljük, hogy hányszor szerepelt i a táblán kezdetben, akkor a 6-hoz relatív prím számok számát felírva $6 = a_5 + a_7$. Tegyük fel most, hogy sem 8-as, sem 9-es szám nem létezik. Ekkor minden szám az {5, 6, 7} közül kerül ki, de ekkor a feltétel nem teljesülhetne (a halmaz bármely két eleme relatív prím). Így vagy 8-as, vagy 9-es szám volt a táblán kezdetben.

Ha van 8-as szám, akkor arra felírva $8 = a_5 + a_7 + a_9$, tehát $8 = 6 + a_9$, vagyis $a_9 = 2$. Ha pedig van 9-es, akkor arra $9 = a_5 + a_7 + a_8 = 6 + a_8$, amiből $a_8 = 3$. Így mindkét fajta szám létezik, 8-asból 3, 9-esből pedig 2 van.

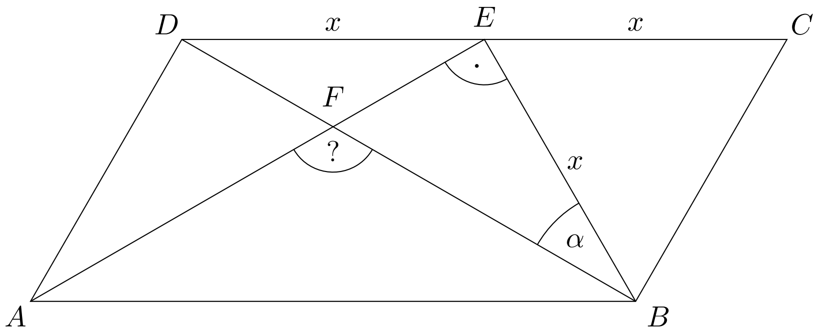
Ekkor ha létezik 5-ös, akkor $5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9$. Azonban 6-os létezik, így $a_6 \geq 1$, és tudjuk, hogy $a_8 + a_9 = 3 + 2 = 5$, így $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq 6$, ami ellentmondás. Tehát 5-ös sincsen.

Ha létezik 7-es, akkor $7 = a_5 + a_6 + a_8 + a_9 = 0 + a_6 + 3 + 2$, amiből $a_6 = 2$. A 9-esre felírva ekkor $9 = a_5 + a_7 + a_8 = 0 + a_7 + 3$, amiből $a_7 = 6$, de ekkor a számok száma $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 2 + 6 + 3 + 2 = 13$, ami túl sok.

Tehát 7-es nem létezik, így viszont a 9-esre felírva $9 = a_5 + a_7 + a_8 = 0 + 0 + 3$, ami ellentmondás. Így 12-nél kevesebb szám nem lehetett a táblán kezdetben.

D5. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen a CD oldal felezőpontja E. Legyen az AE és BD szakaszok metszéspontja F. Tegyük fel, hogy az AEB szög derékszög, és $EB = ED$. Számoljátok ki az AFB szöget.

Megoldás:



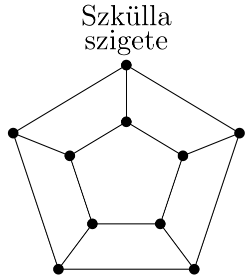
Legyen a DBE szög egyenlő α-val. Tudjuk, hogy DEB háromszög egyenlőszárú, mert $EB = ED = x$, vagyis $BDE\sphericalangle = DBE\sphericalangle = \alpha$. Mivel a BDE és ABD szögek váltószögek, ezért $ABD\sphericalangle = \alpha$.

Mivel E felezi a CD oldalt, így $ED = EC = x$, amiből $CD = 2x$. Tudjuk, hogy $ABCD$ paralelogramma, ezért $AB = CD = 2x$, tehát az AEB derékszögű háromszög EB befogója fele olyan hosszú, mint az AB átfogó, vagyis AEB félszabályos háromszög. Emiatt $ABE\sphericalangle = 2\alpha = 60°$, vagyis $\alpha = 30°$, míg $EAB\sphericalangle = 30°$.

Most tekintsük az AFB háromszög szögeit, majd rendezzük az egyenletet a kérdéses szögre:

$$AFB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 30° = 120°.$$

D6. **a)** A jobb oldali térképen a Dürerenciás Tenger tíz szigete látható, amelyek egyike egy kincset rejt. Két sziget pontosan akkor van összekötve az ábrán, ha üzemel köztük közvetlen hajóút. Minden hajóúton mindkét irányban közlekednek hajók. Leilának minden szigeten lakik egy ismerőse, a segítségükkel szeretné megszerezni a kincset. Mielőtt Leila elutazik a szigetcsoportra, szeretne biztosra menni, ezért telefonon beszél néhány ismerősével. Ha Leila felhívja egy ismerősét, ő csak azt árulja el neki, hogy legkevesebb hány hajóúttal érhető el az ő szigetéről a kincses sziget. Legalább hány ismerősét kell felhívnia, hogy biztosan meg tudja mondani, hogy melyik sziget rejti a kincset, ha tudjuk, hogy először a Szkülla szigetén lakó Lilit hívja fel?



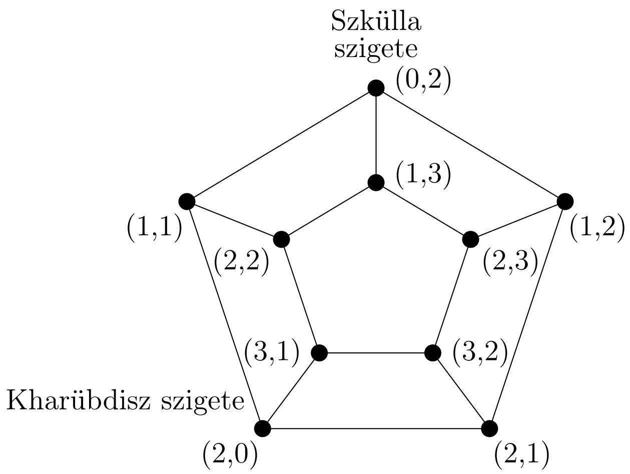
b) Leila most egy öt szigetből álló szigetcsoportot szemelt ki. Sikerült megtudnia, hogy melyik szigetek között üzemelnek hajóutak. Kis gondolkodás után megállapította, hogy biztosan meg tudja határozni a kincses szigetet, ha felhívja egymás után két, különböző szigeten élő ismerősét. Ezek alapján legfeljebb hány hajóút futhat a szigetek között?

A feltételek megegyeznek az előző részben leírtakkal: az egyik sziget kincset rejt, minden szigeten van egy ismerőse, akit fel tud hívni, hogy megtudja, hogy az adott szigetről legkevesebb hány hajózással lehet a kincses szigetre jutni. Bármely két sziget között legfeljebb egy közvetlen hajóút vezet, és a hajóutakon mindig mindkét irányban közlekedik hajó. Továbbá még azt is tudjuk, hogy minden szigetről minden másik szigetet el lehet érni hajózás segítségével.

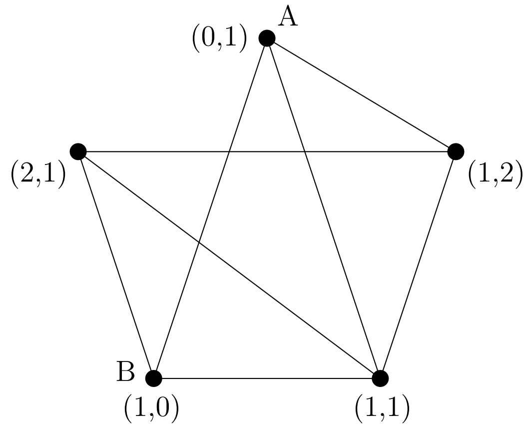
Megoldás:

a) Leilának csak Szküllára telefonálnia nyilván nem elég, mert ha például onnan egy hajóútnyira van a kincs, akkor nem tudja eldönteni, hogy melyik szomszédos szigeten van.

Nevezzük az ábrán a bal alsó szigetet Kharübdisz szigetének. Belátjuk, hogy Leilának elég Szkülla és Kharübdisz szigetére telefonálnia, és a szerzett információk alapján már egyértelműen meg tudja határozni a kincses szigetet. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor igaz, hogyha bármelyik két szigetre igaz, hogy vagy Szküllától, vagy Kharübdisztól nem ugyanannyi hajózásra vannak. Az ábrán minden szigethez odaírtunk két számot, az első mindig az, hogy Szküllától legkevesebb hány hajózás kell, hogy odajussunk, a második pedig hogy Kharübdisztól hány hajózás kell. Látható, hogy tényleg nincs két olyan sziget, ami mellé pont ugyanazt a számpárt írtuk. Tehát Szküllát és Kharübdiszt felhívva Leila tényleg egyértelműen meg tudja határozni a kincses szigetet, így a feladatra kettő a válasz.



b) Tekintsük az alábbi elrendezést:



Ha itt a felső szigetet nevezzük A-nak, és a bal alsót B-nek, akkor az előző feladatrészhez hasonlóan ezekből koordinátázva minden sziget koordinátája különböző lesz (lásd ábra), így itt is elég erre a két szigetre telefonálni a kincs helyének meghatározásához. Ebben a konstrukcióban 8 hajóút van, már csak azt kell belátni, hogy ennél több nem lehet. 10 hajóút nyilván nem lehet, mert akkor bárhogyan választjuk a két szigetet, ahová telefonálunk, a másik három sziget mindkettőtől 1 távolságra van. Hasonlóan 9 hajóút sem lehet, mert ekkor bármely két szigetre telefonálva lesz másik két olyan sziget, melyek mindkét felhívott szigettől 1 hajóútnyira lesznek, így ebben az esetben sem határozható meg egyértelműen a kincs helye.

D7. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ valós számokra teljesül, hogy

- $a_{2023} = a_1$,
- és minden $n \geq 3$-ra $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} - 1$, vagyis a harmadik számtól kezdve minden szám az előző két szám átlagánál eggyel kisebb.

Bizonyítsátok be, hogy $a_n \geq a_1$ teljesül minden $1 \leq n \leq 2023$-ra.

Megoldás: Indirekten bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy létezik olyan a_n, amire $a_n < a_1$. Vegyük a legkisebb ilyen n indexet, amire ez teljesül.

Belátjuk, hogy n nem lehet 2. Tegyük fel, hogy $a_2 < a_1$, indukcióval bizonyítjuk, hogy ekkor minden $1 < k \leq 2023$ esetén $a_k < a_1$, ami ellentmondáshoz fog vezetni a $k = 2023$ választással. A $k = 2$ kezdőlépés esetén a feltevésünk szerint igaz. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy minden $2 \leq l < k \leq 2023$ esetén már beláttuk, hogy $a_l < a_1$. Ekkor $a_{k-1} < a_1$ és $a_{k-2} < a_1$, így $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k-2}}{2} - 1 < \frac{2a_1}{2} - 1 < a_1$, amit bizonyítani akartunk.

Tehát $2 < n < 2023$. Ekkor $a_n < a_1 \leq a_{n-2}$, hiszen a_n volt az első tagja a sorozatnak, ami kisebb mint a_1. Így $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{2} - 1 < \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} - 1 = a_n$. Emiatt a_n és a_{n+1} is kisebb, mint a_1. Viszont ekkor a fenti indukciós bizonyításhoz hasonlóan látható, hogy minden $k \geq n$ esetén $a_k < a_1$, ami ellentmondás. Ezzel a bizonyítást befejeztük.