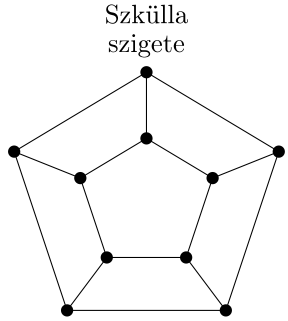
XVII. DÜRER VERSENY

E KATEGÓRIA

FELADATSOR — **HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.**

1. a) A jobb oldali térképen a Dürerenciás Tenger tíz szigete látható, amelyek egyike egy kincset rejt. Két sziget pontosan akkor van összekötve az ábrán, ha üzemel köztük közvetlen hajóút. Minden hajóúton mindkét irányban közlekednek hajók. Leilának minden szigeten lakik egy ismerőse, a segítségükkel szeretné megszerezni a kincset. Mielőtt Leila elutazik a szigetcsoportra, szeretne biztosra menni, ezért telefonon beszél néhány ismerősével. Ha Leila felhívja egy ismerősét, ő csak azt árulja el neki, hogy legkevesebb hány hajóúttal érhető el az ő szigetéről a kincses sziget. Legalább hány ismerősét kell felhívnia, hogy biztosan meg tudja mondani, hogy melyik sziget rejti a kincset, ha tudjuk, hogy először a Szkülla szigetén lakó Lilit hívja fel?



b) Leila most egy öt szigetből álló szigetcsoportot szemelt ki. Sikerült megtudnia, hogy melyik szigetek között üzemelnek hajóutak. Kis gondolkodás után megállapította, hogy biztosan meg tudja határozni a kincses szigetet, ha felhívja egymás után két, különböző szigeten élő ismerősét. Ezek alapján legfeljebb hány hajóút futhat a szigetek között?

A feltételek megegyeznek az előző részben leírtakkal: az egyik sziget kincset rejt, minden szigeten van egy ismerőse, akit fel tud hívni, hogy megtudja, hogy az adott szigetről legkevesebb hány hajózással lehet a kincses szigetre jutni. Bármely két sziget között legfeljebb egy közvetlen hajóút vezet, és a hajóutakon mindig mindkét irányban közlekedik hajó. Továbbá még azt is tudjuk, hogy minden szigetről minden másik szigetet el lehet érni hajózás segítségével.

2. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen a CD oldal felezőpontja E. Legyen az AE és BD szakaszok metszéspontja F. Tegyük fel, hogy az AEB szög derékszög, és $EB = ED$. Számoljátok ki az AFB szöget.

3. Egy körasztal körül 100 ember ül, 50 lovag és 50 lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. Marci belép a szobába, választ egy asztalnál ülő embert, és tőle kezdve az óramutató járásával megegyező irányban haladva, sorban mindenkinek felteszi a következő kérdést: *„Az eddig elhangzott válaszok között az igenek száma páros volt?”*. Ülhetnek-e úgy az emberek, hogy akárkinek is teszi fel az első kérdést Marci, mindig ugyanannyi igen választ kap?

4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ valós számokra teljesül, hogy
- $a_{2023} = a_1$,
- és minden $n \geq 3$-ra $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} - 1$, vagyis a harmadik számtól kezdve minden szám az előző két szám átlagánál eggyel kisebb.

Bizonyítsátok be, hogy $a_n \geq a_1$ teljesül minden $1 \leq n \leq 2023$-ra.

5. Egy körasztal körül $n \geq 2$ ember ül, akik között kiosztottuk a $0, 1, \ldots, n-1$ számokat úgy, hogy semelyik két ember nem kapta ugyanazt a számot. Egy lépésben mindenki összeadja a saját számát a tőle jobbra ülő számával, majd a kapott összeg n-nel vett osztási maradéka lesz az új száma. A számok egy kezdeti kiosztását nyertes kiosztásnak hívjuk, ha néhány lépés után már senkinek sem fog változni többször a száma.

a) Mely pozitív egész $n \geq 2$ számokra igaz, hogy minden kezdeti kiosztás nyertes kiosztás?

b) Mely pozitív egész $n \geq 2$ számok esetén nem létezik nyertes kiosztás?

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!

A XVII. Dürer Verseny szervezői