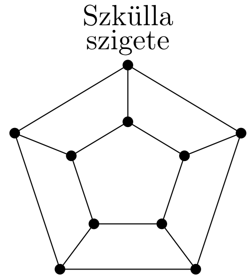
XVII. DÜRER VERSENY

E KATEGÓRIA

MEGOLDÁSOK — **HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.**

E1. **a)** A jobb oldali térképen a Dürerenciás Tenger tíz szigete látható, amelyek egyike egy kincset rejt. Két sziget pontosan akkor van összekötve az ábrán, ha üzemel köztük közvetlen hajóút. Minden hajóúton mindkét irányban közlekednek hajók. Leilának minden szigeten lakik egy ismerőse, a segítségükkel szeretné megszerezni a kincset. Mielőtt Leila elutazik a szigetcsoportra, szeretne biztosra menni, ezért telefonon beszél néhány ismerősével. Ha Leila felhívja egy ismerősét, ő csak azt árulja el neki, hogy legkevesebb hány hajóúttal érhető el az ő szigetéről a kincses sziget. Legalább hány ismerősét kell felhívnia, hogy biztosan meg tudja mondani, hogy melyik sziget rejti a kincset, ha tudjuk, hogy először a Szkülla szigetén lakó Lilit hívja fel?



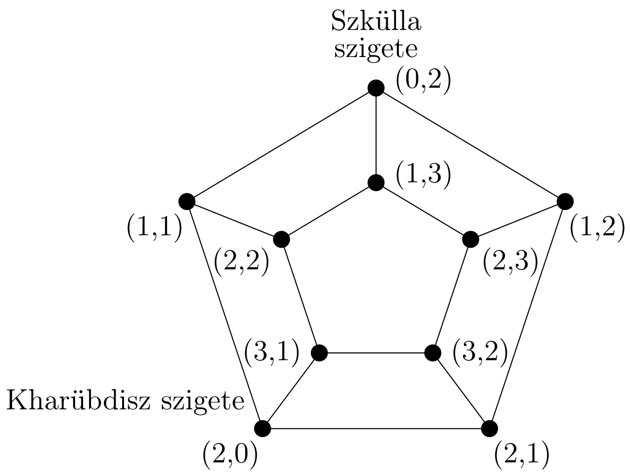
b) Leila most egy öt szigetből álló szigetcsoportot szemelt ki. Sikerült megtudnia, hogy melyik szigetek között üzemelnek hajóutak. Kis gondolkodás után megállapította, hogy biztosan meg tudja határozni a kincses szigetet, ha felhívja egymás után két, különböző szigeten élő ismerősét. Ezek alapján legfeljebb hány hajóút futhat a szigetek között?

A feltételek megegyeznek az előző részben leírtakkal: az egyik sziget kincset rejt, minden szigeten van egy ismerőse, akit fel tud hívni, hogy megtudja, hogy az adott szigetről legkevesebb hány hajózással lehet a kincses szigetre jutni. Bármely két sziget között legfeljebb egy közvetlen hajóút vezet, és a hajóutakon mindig mindkét irányban közlekedik hajó. Továbbá még azt is tudjuk, hogy minden szigetről minden másik szigetet el lehet érni hajózás segítségével.

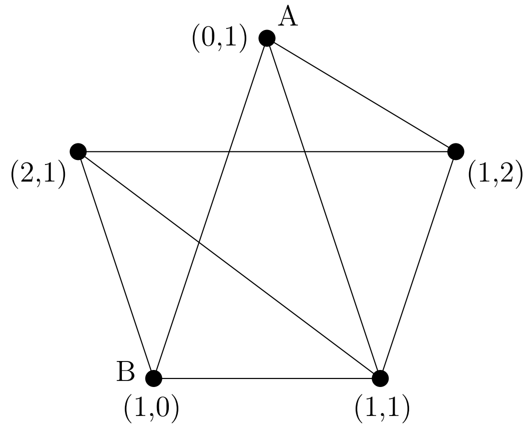
Megoldás:

a) Leilának csak Szküllára telefonálnia nyilván nem elég, mert ha például onnan egy hajóútnyira van a kincs, akkor nem tudja eldönteni, hogy melyik szomszédos szigeten van.

Nevezzük az ábrán a bal alsó szigetet Kharübdisz szigetének. Belátjuk, hogy Leilának elég Szkülla és Kharübdisz szigetére telefonálnia, és a szerzett információk alapján már egyértelműen meg tudja határozni a kincses szigetet. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor igaz, hogyha bármelyik két szigetre igaz, hogy vagy Szküllától, vagy Kharübdisztól nem ugyanannyi hajózásra vannak. Az ábrán minden szigethez odaírtunk két számot, az első mindig az, hogy Szküllától legkevesebb hány hajózás kell, hogy odajussunk, a második pedig hogy Kharübdisztól hány hajózás kell. Látható, hogy tényleg nincs két olyan sziget, ami mellé pont ugyanazt a számpárt írtuk. Tehát Szküllát és Kharübdiszt felhívva Leila tényleg egyértelműen meg tudja határozni a kincses szigetet, így a feladatra kettő a válasz.



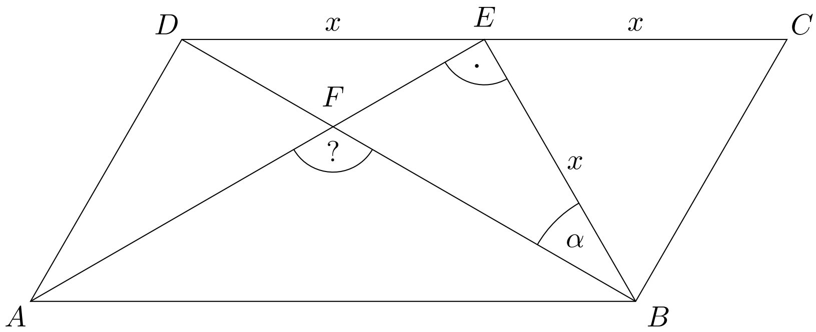
b) Tekintsük az alábbi elrendezést:



Ha itt a felső szigetet nevezzük A-nak, és a bal alsót B-nek, akkor az előző feladatrészhez hasonlóan ezekből koordinátázva minden sziget koordinátája különböző lesz (lásd ábra), így itt is elég erre a két szigetre telefonálni a kincs helyének meghatározásához. Ebben a konstrukcióban 8 hajóút van, már csak azt kell belátni, hogy ennél több nem lehet. 10 hajóút nyilván nem lehet, mert akkor bárhogyan választjuk a két szigetet, ahová telefonálunk, a másik három sziget mindkettőtől 1 távolságra van. Hasonlóan 9 hajóút sem lehet, mert ekkor bármely két szigetre telefonálva lesz másik két olyan sziget, melyek mindkét felhívott szigettől 1 hajóútnyira lesznek, így ebben az esetben sem határozható meg egyértelműen a kincs helye.

E2. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen a CD oldal felezőpontja E. Legyen az AE és BD szakaszok metszéspontja F. Tegyük fel, hogy az AEB szög derékszög, és $EB = ED$. Számoljátok ki az AFB szöget.

Megoldás:



Legyen a DBE szög egyenlő α-val. Tudjuk, hogy DEB háromszög egyenlőszárú, mert $EB = ED = x$, vagyis $BDE\sphericalangle = DBE\sphericalangle = \alpha$. Mivel a BDE és ABD szögek váltószögek, ezért $ABD\sphericalangle = \alpha$.

Mivel E felezi a CD oldalt, így $ED = EC = x$, amiből $CD = 2x$. Tudjuk, hogy $ABCD$ paralelogramma, ezért $AB = CD = 2x$, tehát az AEB derékszögű háromszög EB befogója fele olyan hosszú, mint az AB átfogó, vagyis AEB félszabályos háromszög. Emiatt $ABE\sphericalangle = 2\alpha = 60°$, vagyis $\alpha = 30°$, míg $EAB\sphericalangle = 30°$.

Most tekintsük az AFB háromszög szögeit, majd rendezzük az egyenletet a kérdéses szögre:

$$AFB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 30° = 120°.$$

E3. Egy körasztal körül 100 ember ül, 50 lovag és 50 lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. Marci belép a szobába, választ egy asztalnál ülő embert, és tőle kezdve az óramutató járásával megegyező irányban haladva, sorban mindenkinek felteszi a következő kérdést: *"Az eddig elhangzott válaszok között az igenek száma páros volt?"*. Ülhetnek-e úgy az emberek, hogy akárkinek is teszi fel az első kérdést Marci, mindig ugyanannyi igen választ kap?

Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy ha az utolsóként válaszoló ember lovag vagy lókötő, akkor az igen válaszok száma végül páros vagy páratlan lesz-e.

Ha az utolsóként válaszoló ember lovag, akkor ha az ő válasza előtt elhangzott igenek száma páros volt, akkor ő igennel válaszol, így összességében páratlan sok igen választ kap Marci. Míg ha az utolsó lovag előtt elhangzott igenek száma páratlan volt, akkor ő nemmel válaszol, így szintén összesen páratlan sok igen válasz hangzott el.

Ha pedig az utolsóként válaszoló ember lókötő volt, akkor ha az ő válasza előtt elhangzott igenek száma páros volt, akkor ő nemmel válaszol, így összességében páros sok igen választ kap Marci. Míg ha az utolsó lókötő előtt elhangzott igenek száma páratlan volt, akkor ő igennel válaszol, így szintén összesen páros sok igen válasz hangzott el.

Mivel az emberek között van lovag és lókötő is, ezért lesz olyan elrendezés, amikor az utolsó válaszoló lovag, és olyan is, amikor lókötő. Viszont egyik esetben az igenek száma páratlan, míg a másik esetben az igenek száma páros, azaz nem lehet egyenlő. Sőt, mivel a lovagok és a lókötők száma is 50, így pontosan 50 olyan kiinduló pont van, amikor az igen válaszok száma páros és pontosan 50 olyan kiinduló pont van, amikor az igen válaszok száma páratlan.

Tehát nem létezik olyan elrendezés, hogy Marci bárkitől indulva ugyanannyi igen választ kapna.

E4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ valós számokra teljesül, hogy
- $a_{2023} = a_1$,
- és minden $n \geq 3$-ra $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} - 1$, vagyis a harmadik számtól kezdve minden szám az előző két szám átlagánál eggyel kisebb.

Bizonyítsátok be, hogy $a_n \geq a_1$ teljesül minden $1 \leq n \leq 2023$-ra.

Megoldás: Indirekten bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy létezik olyan a_n, amire $a_n < a_1$. Vegyük a legkisebb ilyen n indexet, amire ez teljesül.

Belátjuk, hogy n nem lehet 2. Tegyük fel, hogy $a_2 < a_1$, indukcióval bizonyítjuk, hogy ekkor minden $1 < k \leq 2023$ esetén $a_k < a_1$, ami ellentmondáshoz fog vezetni a $k = 2023$ választással. A $k = 2$ kezdőlépés esetén a feltevésünk szerint igaz. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy minden $2 \leq l < k \leq 2023$ esetén már beláttuk, hogy $a_l < a_1$. Ekkor $a_{k-1} < a_1$ és $a_{k-2} < a_1$, így $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k-2}}{2} - 1 < \frac{2a_1}{2} - 1 < a_1$, amit bizonyítani akartunk.

Tehát $2 < n < 2023$. Ekkor $a_n < a_1 \leq a_{n-2}$, hiszen a_n volt az első tagja a sorozatnak, ami kisebb mint a_1. Így $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{2} - 1 < \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} - 1 = a_n$. Emiatt a_n és a_{n+1} is kisebb, mint a_1. Viszont ekkor a fenti indukciós bizonyításhoz hasonlóan látható, hogy minden $k \geq n$ esetén $a_k < a_1$, ami ellentmondás. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

E5. Egy körasztal körül $n \geq 2$ ember ül, akik között kiosztottuk a $0, 1, \ldots, n-1$ számokat úgy, hogy semelyik két ember nem kapta ugyanazt a számot. Egy lépésben mindenki összeadja a saját számát a tőle jobbra ülő számával, majd a kapott összeg n-nel vett osztási maradéka lesz az új száma. A számok egy kezdeti kiosztását nyertes kiosztásnak hívjuk, ha néhány lépés után már senkinek sem fog változni többször a száma.
a) Mely pozitív egész $n \geq 2$ számokra igaz, hogy minden kezdeti kiosztás nyertes kiosztás?
b) Mely pozitív egész $n \geq 2$ számok esetén nem létezik nyertes kiosztás?

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy ha n páratlan, akkor nem létezik nyertes kiosztás, ha n kettőhatvány, akkor minden kiosztás nyertes kiosztás, és ha n páros, de nem kettőhatvány, akkor van nyertes és nem nyertes kiosztás is.

A nyertes kiosztás célja ekvivalens a csupa 0 állapot elérésével, hiszen ha valakinek egy lépésben nem változik a száma, akkor a tőle jobbra ülő száma 0 kellett, hogy legyen, így ha senkinek sem változik egy lépésben a száma, akkor mindenkinél a 0 van.

Először belátjuk, hogy ha n páratlan, akkor semmilyen esetben sem érhetik el a csupa 0 állapotot. Tegyük fel, hogy elérhetik céljukat. Ekkor a csupa 0 állapot előtt legyen az i. ember száma k_i. Tudjuk, hogy $k_i + k_{i+1} \equiv 0 \ (mod\ n)$ minden i-re $(mod\ n)$, azaz $k_i \equiv -k_{i+1} \ (mod\ n)$, azaz $k_i \equiv k_{i+2} \ (mod\ n)$. Ezt tovább írva kapjuk, hogy $k_i \equiv k_{i+2} \equiv \ldots \equiv k_{i+2n-2} \ (mod\ n)$, amivel az összes embert érintettük, hiszen a 2 relatív prím n-nel. Így ebből $k_i \equiv k_{i+1} \ (mod\ n)$ is teljesül, viszont $k_i \equiv -k_{i+1} \ (mod\ n)$ miatt ekkor $k_{i+1} \equiv 0 \ (mod\ n)$ és szimmetria miatt ekkor minden szám 0 kellett, hogy legyen. Így a csupa 0 állapot előtt is csupa 0 állapot lehetett csak, azaz semmilyen kezdő pozícióból nem érhetik el a céljukat páratlan n esetén.

Most megmutatjuk azt, hogy nem 2-hatvány páros szám esetén van olyan kezdő kiosztás, amiből elérik céljukat és olyan is, amiből nem. Legyen az $n = 2l$ ember kezdőszáma $0, 1, -2, 3, -4, \ldots, -(2l-2), 2l-1$ ilyen sorrendben. (Ez valóban $2l$ szám és mind különböző modulo n, hiszen a páratlanok pozitív előjellel vannak kiosztva, a párosak negatívval.) Ekkor az első lépés után a számok $1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1$, azaz a második lépés után máris elérik céljukat, a csupa 0 állapotot. Ha viszont a kezdő kiosztás a $0, 1, \ldots, 2l-2, 2l-1$, akkor nem érhetik el céljukat: legyen $n = 2^a b$, ahol a pozitív egész és $b > 1$ egy páratlan szám. Egy lépés után az $1, 3, 5, \ldots, 4l-5, 4l-3, 2l-1$ számok lesznek az embereknél, azaz a különbség 2 lesz mindenhol modulo n. A következő lépés után már 4 lesz a szomszédos számok közti különbség, stb., a lépés után a szomszédos számok közti különbség 2^a lesz. Mivel 2^a relatív prím b-vel, ezért az első b szám a lépés után csupa különböző maradékot fog adni b-vel osztva. A $b+1$-edik szám kongruens lesz az első számmal modulo b, hiszen a különbségük pontosan $n = 2^a b$. Így a lépés után modulo b az emberek számai 2^a darab egyforma ciklusba lesznek rendezve, minden ciklus pontosan 1 számot tartalmaz minden maradékból modulo b. Így innentől modulo b ugyanaz fog történni, mintha csak b emberrel kezdődne a folyamat. Mivel b páratlan, ezért nem érhetik el a csupa 0 állapotot. Azaz ha n páros, de nem kettőhatvány, akkor nem állíthatunk biztosat a cél eléréséről.

Végül megmutatjuk, hogy ha n egy 2-hatvány, akkor biztosan elérik a céljukat az emberek. Legyen $n = 2^a$ és a kezdeti számok ilyen sorrendben $k_1, k_2, \ldots, k_{2^a}$. Minden lépésben mindenki a saját számához hozzáadja a tőle jobbra ülő számát, így m lépés után az i-edik ember száma felírható a következő módon: $\binom{m}{0}k_i + \binom{m}{1}k_{i+1} + \binom{m}{2}k_{i+2} + \cdots + \binom{m}{m}k_{i+m}$, ahol a k indexét modulo n vesszük. Nézzük ennek értékét $2^{a+1}-1$ lépés után! Tudjuk, hogy $\binom{2^{a+1}-1}{j}$ páratlan minden $0 \leq j \leq 2^{a+1}-1$ számra, így $2^{a+1}-1$ lépés után az i-edik ember száma $\binom{2^{a+1}-1}{0}k_i + \binom{2^{a+1}-1}{1}k_{i+1} + \cdots + \binom{2^{a+1}-1}{2^{a+1}-1}k_{i+2^{a+1}-1}$, ahol pontosan 2^{a+1} darab összeadandó van, azaz minden k_j pontosan két összeadandóban szerepel. Mivel minden szorzója a k_j-knek $\binom{2^{a+1}-1}{j}$ alakú, ezért két ilyet összeadva biztos páros szorzója lesz minden k_j számnak az összegben. Így minden ember száma $2^{a+1}-1$ lépés után páros lesz. Megint megismételve $2^{a+1}-1$ lépést, mindenki számába biztosan belekerül még egy 2-es prímtényező. Ezt folytatva egy idő után biztosan eljutunk olyan helyzetbe, amikor már mindenki száma osztható 2^a-nal, azaz modulo $n = 2^a$ mindenkinél 0 lesz, amivel befejeztük a bizonyítást.