



# XVII. DÜRER VERSENY

**E+**  
KATEGÓRIA

**HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.**

1. Dürerlandia szigetének kör alakú partján 100 árustól lehet lazacot venni Dürer dollárért. A szigeten az idők kezdete óta felváltva követik egymást a gazdag évek és a szegény évek. A gazdag években minden kereskedő a saját múlt évi árának, illetve a bal oldali szomszédja múlt évi árának a maximumáért árulja a lazac kilóját. A szegény években viszont a saját múlt évi árának, illetve a bal oldali szomszédja múlt évi árának a minimumáért árulja. Pali és Paca két árus a szigeten. Idén Pali 17 Dürer dollárért árul egy kiló lazacot. Bizonyítsátok be, hogy lesz olyan év, amikor Paca 17 Dürer dollárért fog árulni egy kiló lazacot.

*Az árusok halhatatlanok, már évezredek óta árulják és az idők végezetéig árulni fogják a lazacot a bódéjukban.*

2. A derékszögű koordináta-rendszer egyik origó csúcsú negyedsíkját lefedtük  $1\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ -es dominókkal átfedés nélkül úgy, hogy egyik dominó sem lóg ki a negyedsíkból. Az origóban csücsül Boldi, a bolha, aki minden ugrásánál egy dominó egyik csúcsából a vele átellenes csúcsába ugorhat. Lehetséges-e, hogy úgy helyezkednek el a dominók, hogy Boldi nem tud  $2023\text{ cm}$ -nél messzebb kerülni az origótól?

3. Egy körasztal körül  $n \geq 2$  ember ül, akik között kiosztottuk a  $0, 1, \dots, n-1$  számokat úgy, hogy semelyik két ember nem kapta ugyanazt a számot. Egy lépésben mindenki összeadja a saját számát a tőle jobbra ülő számával, majd a kapott összeg  $n$ -nel vett osztási maradéka lesz az új száma. A számok egy kezdeti kiosztását nyertes kiosztásnak hívjuk, ha néhány lépés után már senkinek sem fog változni többször a száma.

a) Mely pozitív egész  $n \geq 2$  számokra igaz, hogy minden kezdeti kiosztás nyertes kiosztás?

b) Mely pozitív egész  $n \geq 2$  számok esetén nem létezik nyertes kiosztás?

4. A *Kazamatematika* nevű kétszemélyes játékban a játékosok egy kalandort irányítanak egy mélytengeri barlangban. Kezdetben  $h$  életpontja van a kalandornak, ahol  $h$  egy egynél nagyobb egész szám. A barlang különböző termekből áll, minden teremről tudjuk, hogy mely termekbe vezet belőle közvetlen út. Az utak egyirányúak, valamint egy teremből akár önmagába is vezethet út. Minden teremből van kivezető út. Ötféle terem létezik:

- Bejárat: a kalandor innen indul, ide nem vezet út;
- Üres: nem történik semmi;
- Tüske: a kalandor veszít egy életpontot;
- Csapda: a kalandort eltalálja egy nyíl;
- Katakomba: a kalandor annyi életpontot veszít, ahány nyíl eddig összesen eltalálta.

A két játékos felváltva lép, mindig egy út mentén továbbmozgatva a kalandort. Az a játékos veszít, akinek a lépése után a kalandor életpontja  $0$  alá csökken. Mutassatok példát olyan barlangtérképre, ami legfeljebb  $20$  teremből áll, pontosan egy Bejáratot tartalmaz, továbbá ha  $h$  prímszám, akkor az első játékosnak, míg ha  $h$  összetett szám, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.

*Ha a játék nem ér véget véges sok lépésben, akkor egyik játékos sem nyer.*



FELADATSOR

# XVII. DÜRER VERSENY

**E+**  
KATEGÓRIA

HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.

5. Adott egy  $A_1A_2A_3$  háromszög. Ha  $X$  egy pont a háromszög belsejében, akkor minden  $1 \leq i \leq 3$ -ra jelölje  $X_i$  az  $A_iX$  félegyenes és az  $A_i$ -vel szemközti oldal metszéspontját. Ha  $P$  és  $Q$  különböző pontok a háromszög belsejében, akkor a két pontot *izotómiкусnak* nevezük (avagy *izotómiкус pontpárt* alkotnak), ha minden  $i$ -re a  $P_i$  és  $Q_i$  pontok szimmetrikusak az  $A_i$ -vel szemközti oldal felezőpontjára.

Ágoston szeretne izotómiкус pontpárokat szerkeszteni kedvenc szerkesztő programja segítségével, a GeoZebra-val. Már fel is vette ehhez egy nem egyenlő szárú, hegyesszögű háromszög három csúcsát és három oldalegyenesét, amikor hirtelen vírusos lett a gépe. A funkciók nagy része használhatatlanná vált, csak néhány eszköz működik, azoknak is egy része csak fizetős:

Eszköz neve	Leírás	Költség (használatonként)
Pont	Tetszőleges (az egér helyzete szerinti) pont felvétele a síkon vagy egy alakzaton (körön vagy egyenesen)	Ingyenes
Metszéspont	Két alakzat (kör vagy egyenes) metszéspontjainak felvétele	Ingyenes
Egyenes	Két ponton átmenő egyenes megrajzolása	5 Dürer dollár
Merőleges	Pontból merőleges egyenes állítása egy már megszerkesztett egyenesre	50 Dürer dollár
Köré írt kör	Három ponton átmenő kör megrajzolása	10 Dürer dollár

a) Ágota felvett egy  $P$  pontot a háromszög belsejében, amely különbözik a háromszög súlypontjától. Mutassátok meg, hogy Ágoston 1000 Dürer dollárból tud olyan  $Q$  pontot szerkeszteni, amelyre  $P$  és  $Q$  izotómiкусak.

b) Bizonyítsátok be, hogy minden  $n$  pozitív egészre Ágoston  $200 + 10n$  Dürer dollárból tud  $n$  darab különböző izotómiкус pontpárt szerkeszteni.

*Mindkét feladatrészben részpontszám járhat akkor is, ha az általatok bemutatott szerkesztés meghaladja Ágoston pénzügyi kereteit. A két feladatrész független, azaz Ágoston nem használhatja a b) részben azt, amit az a) részben szerkesztett.*

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!*

*A XVII. Dürer Verseny szervezői*