XVII. DÜRER VERSENY

E+ KATEGÓRIA

MEGOLDÁSOK — **HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.**

E+1. Dürerlandia szigetének kör alakú partján 100 árustól lehet lazacot venni Dürer dollárért. A szigeten az idők kezdete óta felváltva követik egymást a gazdag évek és a szegény évek. A gazdag években minden kereskedő a saját múlt évi árának, illetve a bal oldali szomszédja múlt évi árának a maximumáért árulja a lazac kilóját. A szegény években viszont a saját múlt évi árának, illetve a bal oldali szomszédja múlt évi árának a minimumáért árulja. Pali és Paca két árus a szigeten. Idén Pali 17 Dürer dollárért árul egy kiló lazacot. Bizonyítsátok be, hogy lesz olyan év, amikor Paca 17 Dürer dollárért fog árulni egy kiló lazacot.
Az árusok halhatatlanok, már évezredek óta árulják és az idők végezetéig árulni fogják a lazacot a bódéjukban.

Megoldás: A megoldás során az indexeket mindig modulo 100 értjük. Számozzuk meg az árusokat 1-től 100-ig valahonnan kezdve, balra haladva. Jelölje $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ a lazacárakat valamelyik évben, nevezzük ezt A évnek, és legyenek az árak $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ a rákövetkező, úgynevezett B évben, végül az erre rákövetkező C évben jelölje $c_1, c_2, \dots, c_{100}$ az árakat. A feladat feltétele úgy fogalmazható át matematikailag, hogy minden $1 \leq i \leq 100$ esetén $b_i = \max(a_i, a_{i+1})$ ha a B év gazdag, és $b_i = \min(a_i, a_{i+1})$ ha a B év szegény, és hasonlóan leírható az átmenet a B és C évek között is.

Tegyük fel, hogy B gazdag év. Figyeljük meg, hogy ekkor nem lehet olyan i index, melyre $b_{i-1} < b_i$ és $b_{i+1} < b_i$, mivel

$$\max(b_{i-1}, b_{i+1}) = \max(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) \geq \max(a_i, a_{i+1}) = b_i.$$

Általánosan, egy gazdag évben sosem lehet, hogy egy kereskedő szigorúan drágábban árul mindkét szomszédjánál, és hasonlóan, egy szegény évben nem lehetséges, hogy valaki mindkét szomszédjánál olcsóbban árul.

Ha az A szegény évre alkalmazzuk ezt a megfigyelést, akkor ez azt jelenti, hogy minden i esetén $b_i = \max(a_i, a_{i+1})$ és $b_{i+1} = \max(a_{i+1}, a_{i+2})$ közül legalább az egyik a_{i+1}-gyel egyenlő. Továbbá világos, hogy mindkét mennyiség legalább a_{i+1}, így

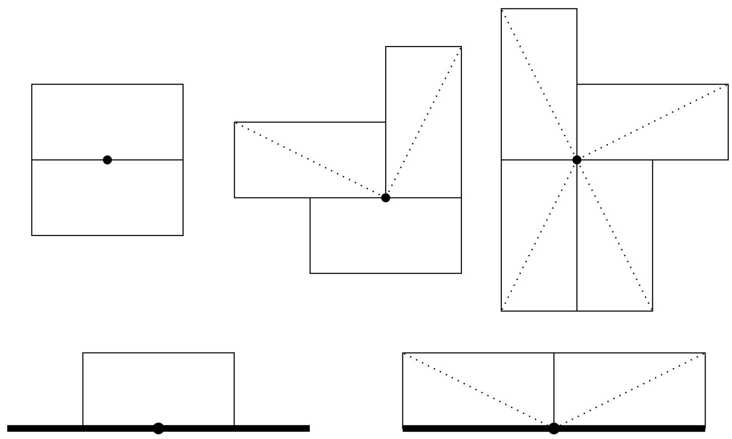
$$c_i = \min(b_i, b_{i+1}) = a_{i+1}.$$

Tehát a C évben minden kereskedő éppen annyiért fog árulni, mint amennyiért két évvel korábban a bal oldali szomszédja adta a lazacot. Világos, hogy ez az indoklás bármelyik évekre igaz, hasonlóan elmondható az indoklás, ha A és C gazdag év, és B szegény.

Tehát ha Pacától Pali k kereskedőnyire van balra lépkedve a sziget kerülete mentén, akkor $2k$ év múlva Paca éppen 17 dollárért fog árulni.

E+2. A derékszögű koordináta-rendszer egyik origó csúcsú negyedsíkját lefedtük 1 cm × 2 cm-es dominókkal átfedés nélkül úgy, hogy egyik dominó sem lóg ki a negyedsíkból. Az origóban csücsül Boldi, a bolha, aki minden ugrásánál egy dominó egyik csúcsából a vele átellenes csúcsába ugorhat. Lehetséges-e, hogy úgy helyezkednek el a dominók, hogy Boldi nem tud 2023 cm-nél messzebb kerülni az origótól?

Megoldás: Tekintsük azt a gráfot, amiben a csúcsok a dominók csúcsai, és két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha egy dominó átellenes csúcsai. Ez éppen azzal ekvivalens, hogy Boldi át tud ugrani az egyikből a másikba. Látható, hogy a negyedsík minden pontjában páros sok él találkozik, kivéve az origót, ahol csak egy (az ábrák mutatják a lényegesen különböző eseteket). Így ha azon csúcsok halmaza, ahova Boldi el tud jutni, csak véges sok csúcsból állna, akkor ebben a részgráfban a fokszámok összege páratlan lenne. Tehát a bejárható részgráf nem lehet véges, azaz tetszőlegesen távolra el tud jutni Boldi az origótól.



E+3. Egy körasztal körül $n \geq 2$ ember ül, akik között kiosztottuk a $0, 1, \ldots, n-1$ számokat úgy, hogy semelyik két ember nem kapta ugyanazt a számot. Egy lépésben mindenki összeadja a saját számát a tőle jobbra ülő számával, majd a kapott összeg n-nel vett osztási maradéka lesz az új száma. A számok egy kezdeti kiosztását nyertes kiosztásnak hívjuk, ha néhány lépés után már senkinek sem fog változni többször a száma.
a) Mely pozitív egész $n \geq 2$ számokra igaz, hogy minden kezdeti kiosztás nyertes kiosztás?
b) Mely pozitív egész $n \geq 2$ számok esetén nem létezik nyertes kiosztás?

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy ha n páratlan, akkor nem létezik nyertes kiosztás, ha n kettőhatvány, akkor minden kiosztás nyertes kiosztás, és ha n páros, de nem kettőhatvány, akkor van nyertes és nem nyertes kiosztás is.

A nyertes kiosztás célja ekvivalens a csupa 0 állapot elérésével, hiszen ha valakinek egy lépésben nem változik a száma, akkor a tőle jobbra ülő száma 0 kellett, hogy legyen, így ha senkinek sem változik egy lépésben a száma, akkor mindenkinél a 0 van.

Először belátjuk, hogy ha n páratlan, akkor semmilyen esetben sem érhetik el a csupa 0 állapotot. Tegyük fel, hogy elérhetik céljukat. Ekkor a csupa 0 állapot előtt legyen az i. ember száma k_i. Tudjuk, hogy $k_i + k_{i+1} \equiv 0 \ (mod\ n)$ minden i-re $(mod\ n)$, azaz $k_i \equiv -k_{i+1} \ (mod\ n)$, azaz $k_i \equiv k_{i+2} \ (mod\ n)$. Ezt tovább írva kapjuk, hogy $k_i \equiv k_{i+2} \equiv \ldots \equiv k_{i+2n-2} \ (mod\ n)$, amivel az összes embert érintettük, hiszen a 2 relatív prím n-nel. Így ebből $k_i \equiv k_{i+1} \ (mod\ n)$ is teljesül, viszont $k_i \equiv -k_{i+1} \ (mod\ n)$ miatt ekkor $k_{i+1} \equiv 0 \ (mod\ n)$ és szimmetria miatt ekkor minden szám 0 kellett, hogy legyen. Így a csupa 0 állapot előtt is csupa 0 állapot lehetett csak, azaz semmilyen kezdő pozícióból nem érhetik el a céljukat páratlan n esetén.

Most megmutatjuk azt, hogy nem 2-hatvány páros szám esetén van olyan kezdő kiosztás, amiből elérik céljukat és olyan is, amiből nem. Legyen az $n = 2l$ ember kezdőszáma $0, 1, -2, 3, -4, \ldots, -(2l-2), 2l-1$ ilyen sorrendben. (Ez valóban $2l$ szám és mind különböző modulo n, hiszen a páratlanok pozitív előjellel vannak kiosztva, a párosak negatívval.) Ekkor az első lépés után a számok $1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1$, azaz a második lépés után máris elérik céljukat, a csupa 0 állapotot. Ha viszont a kezdő kiosztás a $0, 1, \ldots, 2l-2, 2l-1$, akkor nem érhetik el céljukat: legyen $n = 2^a b$, ahol a pozitív egész és $b > 1$ egy páratlan szám. Egy lépés után az $1, 3, 5, \ldots, 4l-5, 4l-3, 2l-1$ számok lesznek az embereknél, azaz a különbség 2 lesz mindenhol modulo n. A következő lépés után már 4 lesz a szomszédos számok közti különbség, stb., a lépés után a szomszédos számok közti különbség 2^a lesz. Mivel 2^a relatív prím b-vel, ezért az első b szám a lépés után csupa különböző maradékot fog adni b-vel osztva. A $b+1$-edik szám kongruens lesz az első számmal modulo b, hiszen a különbségük pontosan $n = 2^a b$. Így a lépés után modulo b az emberek számai 2^a darab egyforma ciklusba lesznek rendezve, minden ciklus pontosan 1 számot tartalmaz minden maradékból modulo b. Így innentől modulo b ugyanaz fog történni, mintha csak b emberrel kezdődne a folyamat. Mivel b páratlan, ezért nem érhetik el a csupa 0 állapotot. Azaz ha n páros, de nem kettőhatvány, akkor nem állíthatunk biztosat a cél eléréséről.

Végül megmutatjuk, hogy ha n egy 2-hatvány, akkor biztosan elérik a céljukat az emberek. Legyen $n = 2^a$ és a kezdeti számok ilyen sorrendben $k_1, k_2, \ldots, k_{2^a}$. Minden lépésben mindenki a saját számához hozzáadja a tőle jobbra ülő számát, így m lépés után az i-edik ember száma felírható a következő módon: $\binom{m}{0}k_i + \binom{m}{1}k_{i+1} + \binom{m}{2}k_{i+2} + \cdots + \binom{m}{m}k_{i+m}$, ahol a k indexét modulo n vesszük. Nézzük ennek értékét $2^{a+1}-1$ lépés után! Tudjuk, hogy $\binom{2^{a+1}-1}{j}$ páratlan minden $0 \leq j \leq 2^{a+1}-1$ számra, így $2^{a+1}-1$ lépés után az i-edik ember száma $\binom{2^{a+1}-1}{0}k_i + \binom{2^{a+1}-1}{1}k_{i+1} + \cdots + \binom{2^{a+1}-1}{2^{a+1}-1}k_{i+2^{a+1}-1}$, ahol pontosan 2^{a+1} darab összeadandó van, azaz minden k_j pontosan két összeadandóban szerepel. Mivel minden szorzója a k_j-knek $\binom{2^{a+1}-1}{j}$ alakú, ezért két ilyet összeadva biztos páros szorzója lesz minden k_j számnak az összegben. Így minden ember száma $2^{a+1}-1$ lépés után páros lesz. Megint megismételve $2^{a+1}-1$ lépést, mindenki számába biztosan belekerül még egy 2-es prímtényező. Ezt folytatva egy idő után biztosan eljutunk olyan helyzetbe, amikor már mindenki száma osztható 2^a-nal, azaz modulo $n = 2^a$ mindenkinél 0 lesz, amivel befejeztük a bizonyítást.

E+4. A *Kazamatematika* nevű kétszemélyes játékban a játékosok egy kalandort irányítanak egy mélytengeri barlangban. Kezdetben h életpontja van a kalandornak, ahol h egy egynél nagyobb egész szám. A barlang különböző termekből áll, minden teremről tudjuk, hogy mely termekbe vezet belőle közvetlen út. Az utak egyirányúak, valamint egy teremből akár önmagába is vezethet út. Minden teremből van kivezető út. Ötféle terem létezik:

- Bejárat: a kalandor innen indul, ide nem vezet út;
- Üres: nem történik semmi;
- Tüske: a kalandor veszít egy életpontot;
- Csapda: a kalandort eltalálja egy nyíl;
- Katakomba: a kalandor annyi életpontot veszít, ahány nyíl eddig összesen eltalálta.

A két játékos felváltva lép, mindig egy út mentén továbbmozgatva a kalandort. Az a játékos veszít, akinek a lépése után a kalandor életpontja 0 alá csökken. Mutassatok példát olyan barlangtérképre, ami legfeljebb 20 teremből áll, pontosan egy Bejáratot tartalmaz, továbbá ha h prímszám, akkor az első játékosnak, míg ha h összetett szám, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.
Ha a játék nem ér véget véges sok lépésben, akkor egyik játékos sem nyer.

Megoldás:

A kezdőjátékost A-val, a második játékost B-vel jelöljük a megoldás során. Az ötlet az, hogy olyan barlangrendszert építünk, amiben először a B játékos eldöntheti, hogy hány nyíl álljon a kalandorba (de legalább kettő), majd újból a B játékos dönthet, hogy hányszor sétáljunk át katakombákon (ez is legalább kettő). Ezalatt a kalandor veszít valamennyi életpontot, amit a B játékos el tud dönteni, hogy melyik összetett szám legyen. Végül az A játékost belevezeti egy tüskébe, aki így veszít, ha a kalandornak 0 élete volt, különben pedig a B játékos veszít egy végtelen tüskespirál jóvoltából.

Most térjünk rá a precíz bizonyításra. Tekintsük a lent látható térképet, ahol értelemszerűen B a bejárat, Cs a csapda, K a katakomba, T a tüske, valamint a nyilak jelzik, hogy melyik teremből melyikbe lehet menni. A szobák alakja, illetve az **X, Y, Z**-vel jelölt szobák csak a megoldás leírásában fognak segíteni nekünk.

Figyeljük meg, hogy akárhogyan is mozognak, az A játékos csak négyzet alakú szobákra tud lépni, a B játékos pedig csak kör alakú szobákra. Emellett csak az **X, Y, Z** szobákban van döntési lehetőség, mindenhol máshol egyértelmű, hogy hova kell továbblépni. Térjünk rá a két esetre:

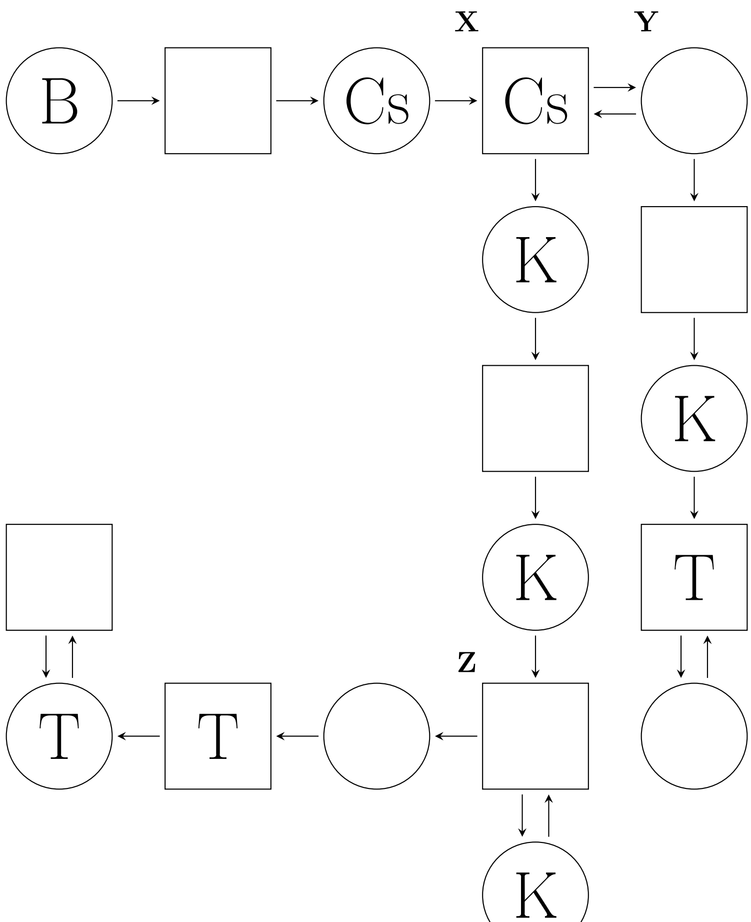
<u>1. eset:</u> h prím.

Bebizonyítjuk, hogy ekkor A-nak van nyerő stratégiája. Legyen a stratégia a következő. Ha az **Y** teremben vagyunk, és a kalandorban több, mint h nyíl áll, akkor lépjünk lefele, különben lépjünk balra. Ezzel megadtuk a stratégiát, mert a kezdőnek semelyik másik ponton nincs döntési lehetősége, mindig csak követi az egyértelmű utat. Gondoljuk meg, hogy mit tud csinálni B. Ha az **X** mezőnél h-szor jobbra lép, akkor az első $h-1$ jobbra lépésnél az A játékos a stratégiája szerint mindig visszalép az **Y** mezőből az **X** mezőbe, azonban a h-adik jobbra lépés után már $h+1$ nyíl lesz a kalandorban. Ekkor lefele lép az A játékos, és a B játékos a következő lépésénél belelép egy katakombába, és egyből veszít. Amennyiben a B játékos valamilyen $0 \leq c < h$ jobbra lépés után lefele megy **X**-ből, akkor $c+2$ nyíl fog kiállni belőle. Ezek után, amíg él a kalandor, a B játékos minden lépésben dönthet, amikor a **Z** teremben áll, hogy balra vagy lefele lép. Figyeljük meg, hogy amíg nem lép balra B, addig az A játékos sosem veszíthet, mert az A játékos mindig csak üres termekbe lép. Ezzel szemben a B játékos minden lépésében egy katakombába lép, így véges sok lépésen belül biztosan veszít, ha nem lép balra **Z**-ből. Tegyük fel, hogy B k alkalommal ($k \geq 0$) úgy dönt, hogy **Z**-ből, lefelé lép, és ezek után még él, és a $(k+1)$-edik alkalommal balra lép. Ekkor eddig $(k+2)$ katakombába lépett bele, így összesen $(c+2)(k+2)$ életet vesztett a kalandor. Feltettük, hogy még él, és $h \neq (c+2)(k+2)$, mivel előbbi prím, utóbbi összetett szám, így még pozitív életpontja van a kalandornak. Emiatt amikor A belelép a négyzet alakú tüske terembe, nem veszít. Ezek után már egyik játékosnak sincs döntése, A minden lépésben üres terembe lép, B minden lépésben tüske terembe, így véges sok lépésen belül veszít B. Ezzel beláttuk, hogy A fent leírt stratégiája tényleg nyerő stratégia, amennyiben h prím.

2. eset: h összetett szám.

Legyen $h = (c+2)(k+2)$, ahol $0 \leq c, k$. Legyen B stratégiája a következő. Az **X** teremben az első c alkalommal jobbra lép, a $(c+1)$-edik visszatérésnél lefelé. A **Z** teremben az első k alkalommal lefele lép, utána balra. Minden más esetben követi az egyértelmű utat. Gondoljuk meg, hogy ez egy nyerő stratégia. Az A játékosnak egyedül az **Y** teremben van döntési lehetősége. A B stratégiája szerint ide legfeljebb c-szer lép a kalandor. Ha bármikor úgy dönt A, hogy lefele lép **Y**-ból, akkor addig legfeljebb $c+1 \leq h$ nyíl van a kalandorban, így a katakomba mező, amibe B belelép, nem vet véget a játéknak. Ezek után minden lépésben A egy tüskébe lép, B üres mezőbe, így véges sok lépésen belül veszít A. Ha A minden alkalommal balra megy **Y**-ból, akkor a $(c+1)$-edik **X**-be éréskor B lefele lép, és ezek után nincs A-nak döntési lehetősége. A $(k+1)$-edik **Z**-be lépéskor B a stratégiája szerint balra lép. Eddig a kalandor pontosan $k+2$ katakombába lépett, és előtte pontosan $c+2$ nyíl állt bele, így éppen $(c+2)(k+2) = h$ életpontot veszített, tehát ekkor 0 életpontja van, azaz még senki nem veszített. Ezek után először A lép tüskébe, és veszít. Tehát ez tényleg egy nyerő stratégia B-nek. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés: Azt gondoljuk, hogy minden megoldásnak muszáj hasonló ötleten alapulnia, de számos módon le lehet rajzolni egy megfelelő térképet, többek között olyan is van, ami sokkal kevesebb szobából áll. Ennél a megoldásnál nem törekedtünk arra, hogy kevés szoba legyen, inkább arra akartunk figyelni, hogy minél egyszerűbben el lehessen vele mondani, hogy miért teljesíti a feladat feltételeit. Szerencsére a 20 termes limitbe azért bőven belefér.



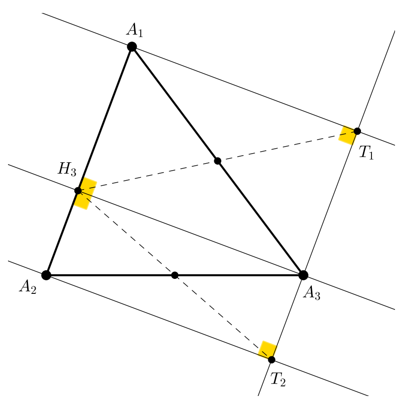
E+5. Adott egy $A_1A_2A_3$ háromszög. Ha X egy pont a háromszög belsejében, akkor minden $1 \leq i \leq 3$-ra jelölje X_i az A_iX félegyenes és az A_i-vel szemközti oldal metszéspontját.
Ha P és Q különböző pontok a háromszög belsejében, akkor a két pontot *izotómikusnak* nevezzük (avagy *izotómikus pontpárt* alkotnak), ha minden i-re a P_i és Q_i pontok szimmetrikusak az A_i-vel szemközti oldal felezőpontjára.

Ágoston szeretne izotómikus pontpárokat szerkeszteni kedvenc szerkesztő programja segítségével, a GeoZebrával. Már fel is vette ehhez egy nem egyenlő szárú, hegyesszögű háromszög három csúcsát és három oldalegyenesét, amikor hirtelen vírusos lett a gépe. A funkciók nagy része használhatatlanná vált, csak néhány eszköz működik, azoknak is egy része csak fizetősen:

Eszköz neve	**Leírás**	**Költség (használatonként)**
Pont	Tetszőleges (az egér helyzete szerinti) pont felvétele a síkon vagy egy alakzaton (körön vagy egyenesen)	Ingyenes
Metszéspont	Két alakzat (kör vagy egyenes) metszéspontjainak felvétele	Ingyenes
Egyenes	Két ponton átmenő egyenes megrajzolása	5 Dürer dollár
Merőleges	Pontból merőleges egyenes állítása egy már megszerkesztett egyenesre	50 Dürer dollár
Köré írt kör	Három ponton átmenő kör megrajzolása	10 Dürer dollár

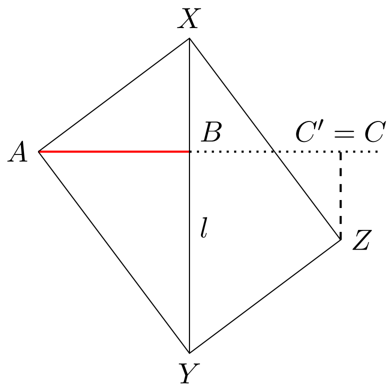
a) Ágota felvett egy P pontot a háromszög belsejében, amely különbözik a háromszög súlypontjától. Mutassátok meg, hogy Ágoston 1000 Dürer dollárból tud olyan Q pontot szerkeszteni, amelyre P és Q izotómikusak.
b) Bizonyítsátok be, hogy minden n pozitív egészre Ágoston $200+10n$ Dürer dollárból tud n darab különböző izotómikus pontpárt szerkeszteni.
*Mindkét feladatrészben részpontszám járhat akkor is, ha az általatok bemutatott szerkesztés meghaladja Ágoston pénzügyi kereteit. A két feladatrész független, azaz Ágoston nem használhatja a **b)** részben azt, amit az **a)** részben szerkesztett.*

Megoldás: Mindkét feladatrészben D$ fogja jelölni a Dürer dollárt. A háromszögünk csúcsai legyenek A_1, A_2, A_3. Sokszor használni fogjuk a feladatbeli X_i jelölést.
a) Közvetlen a definícióból fogjuk megszerkeszteni Q-t. Ehhez szükségünk lesz a háromszög két oldalának felezőpontjára. Mutatunk erre egy viszonylag egyszerű, de kevésbé spórolós szerkesztést (igazán olcsó megoldást a **b)** részben mutatunk). Állítsunk merőlegest A_3-ból az A_1A_2 egyenesre (50 D$), a metszéspontot jelöljük H_3-al. Továbbá állítsunk merőlegest A_3-ból az A_3H_3 egyenesre (50 D$), majd állítsunk merőlegest erre az új egyenesre az A_1, A_2 pontokból ($2 \cdot 50$ D$ $=$ 100 D$), a kapott metszéspontokat jelöljük T_1-el és T_2-vel. Vegyük észre, hogy a derékszögek miatt az $A_1T_1A_3H_3$ és $A_2H_3A_3T_2$ négyszögek téglalapok, így átlóik felezik egymást. Tehát ha megrajzoljuk a T_1H_3, T_2H_3 egyeneseket ($2 \cdot 5$ D$ $=$ 10 D$), akkor ezek az A_1A_3, A_2A_3 oldalakat a felezőpontjaikban metszik.



Most már csak a felezőpontokra tükröznünk kell a P_1, P_2 pontokat. Ehhez felhasználjuk a következő szerkesztési lemmát: egy pontot tudunk tükrözni egy pontra.

Konstrukció: Tegyük fel, hogy az A pontot szeretnénk tükrözni a B pontra. Szerkesszük meg a B-n átmenő AB-re merőleges egyenest, l-t. Legyen $X \neq B$ az l egyenes egy tetszőleges pontja. Az AX egyenesre A-ból állítsunk merőlegest, ez messe l-t Y-ban. Végül az X-ből az AX-re és az Y-ból az AY-ra állított merőleges messe egymást Z-ben. Ekkor az $AXZY$ egy téglalap a derékszögek miatt. Állítsunk Z-ből merőlegest AB-re. A merőleges talppontja legyen C', ekkor az $AC'Z$ háromszögben l párhuzamos a $C'Z$ alappal, és felezi az AZ szakaszt, hiszen a téglalap átlói felezik egymást. Így l középvonal, azaz B felezi AC'-t. Így $C' = C$ a keresett pont.



Ellenőrizzük le, hogy mivel az AB egyenes a mi esetünkben már meg van szerkesztve (ezek ugye az oldalegyenesek), a fenti szerkesztés $5 \cdot 50$ D\$ + 5 D\$ = 255 D\$-ba fog fájni nekünk. Összefoglalva, vesszük a P pontot, megszerkesztjük a P_1, P_2 pontokat ($2 \cdot 5$ D\$ = 10 D\$), majd ezeket tükrözzük a megfelelő oldalak felezőpontjaira ($2 \cdot 255$ D\$ = 510 D\$), így kapjuk a Q_1, Q_2 pontokat. Az A_1Q_1, A_2Q_2 egyenesek metszéspontja Q ($2 \cdot 5$ D\$ = 10 D\$). Azt állítjuk, hogy ez P-vel valóban izotómikus pontpárt alkot. Világos, hogy Q szerkesztése miatt elég annyit belátni, hogy a P_3, Q_3 pontok szimmetrikusak az A_1A_2 oldal felezőpontjára. Írjuk fel a Ceva-tételeket a P, Q pontokra:

$$\frac{A_1P_3}{P_3A_2} \cdot \frac{A_2P_1}{P_1A_3} \cdot \frac{A_3P_2}{P_2A_1} = 1 = \frac{A_1Q_3}{Q_3A_2} \cdot \frac{A_2Q_1}{Q_1A_3} \cdot \frac{A_3Q_2}{Q_2A_1}.$$

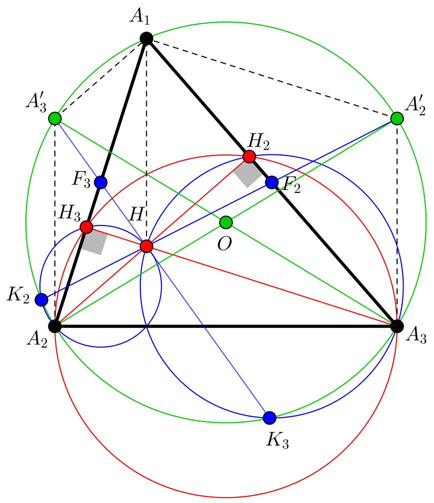
Mivel $A_2P_1 = Q_1A_3$, $P_1A_3 = A_2Q_1$, $A_3P_2 = Q_2A_1$, $P_2A_1 = A_3Q_2$, látjuk, hogy $\frac{A_1P_3}{P_3A_2} = \frac{Q_3A_2}{A_1Q_3}$. Viszont ahogy egy X pont végigfut az A_1A_2 oldalon, úgy az $\frac{A_1X}{XA_2}$ arány minden pozitív valós számot pontosan egyszer vesz fel, azaz az előző egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $A_1P_3 = Q_3A_2$ és $P_3A_2 = A_1Q_3$, azaz valóban szimmetrikusak a P_3, Q_3 pontok a felezőpontra.

Összesen $50 + 50 + 100 + 10 + 10 + 510 + 10 = 740$ D\$-t költöttünk, azaz bőven benne maradtunk a pénzügyi keretekben. Azt könnyű átgondolni, hogy $P \neq Q$, különben ugyanis P a súlypont lenne.

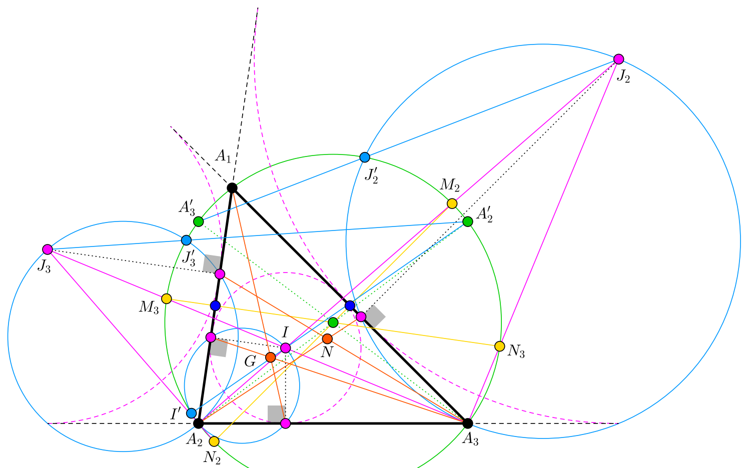
b) Két részből áll a feladat: először belátjuk, hogy tudunk egy izotómikus pontpárt szerkeszteni 210 D\$-ból, majd megmutatjuk, hogy innentől kezdve 10 D\$-ból tudunk mindig új párt szerkeszteni.

Mivel a súlypont nem játszik a definíció miatt, más izotómikus pontpárt kell keresni. Most jusson eszünkbe, hogy a beírt és hozzáírt kör érintési pontjai az egyes oldalakon szimmetrikusan helyezkednek el. Az is világos Ceva-tételéből, hogy a csúcsokat összekötve a beírt kör érintési pontjaival három konkurrens egyenest kapunk (hiszen az oldalakon lévő osztóviszonyokat felírva minden érintőszakasz hossza egyszer fog számlálóként, és egyszer nevezőként szerepelni). Ugyanez elmondható a három hozzáírt kör oldalakon lévő érintési pontjairól. A két közös metszéspontot rendre Gergonne- és Nagel-pontnak hívják, ezeket fogjuk megszerkeszteni (világos, hogy mivel a háromszög nem szabályos, a két pont különbözik).

Állítsunk merőlegest A_2-ből az A_1A_3 egyenesre (50 D\$), a metszéspont legyen H_2. Most szerkesszük meg az $(A_2A_3H_2)$ kört (10 D\$). Mivel ez éppen az A_2A_3 átmérőjű kör lesz, ennek a körnek és A_1A_2-nek a H_3 metszéspontja éppen az A_3-hoz tartozó magasságvonal talppontja lesz. Az A_3H_3 egyenest is behúzva (5 D\$) megkapjuk a H magasságpontot is. Most rajzoljuk meg az $(A_1A_2A_3)$, (A_3HH_2), (A_2HH_3) köröket ($3 \cdot 10$ D\$ = 30 D\$). Az új metszéspontokat nevezzük el: $(A_1A_2A_3) \cap (A_3HH_2) = K_3$, $(A_1A_2A_3) \cap (A_2HH_3) = K_2$. Húzzuk meg a K_2H egyenest (5 D\$), ez messe az A_1A_3 oldalt F_2-ben, illetve a körülírt kört másodszorra A_2'-ben. Ekkor $A_2'K_2A_2\angle = 90°$, tehát A_2A_2' átmérője a körülírt körnek. Továbbá az $A_1HA_3A_2'$ egy paralelogramma, hiszen $A_1H, A_2'A_3 \perp A_2A_3$ és $A_1A_2', HA_3 \perp A_1A_2$. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, F_2 az A_1A_3 oldal felezőpontja lesz. Hasonlóan, húzzuk be a K_3H egyenest (5 D\$), ami az A_1A_2 oldalt az F_3 felezőpontjában. illetve a körülírt kört másodszorra az A_3-mal átellenes A_3' pontban metszi. Ezzel a körülírt kör O középpontját is megkapjuk, ha az A_2A_2', A_3A_3' egyeneseket megszerkesztjük ($2 \cdot 5$ D\$ $= 10$ D\$).

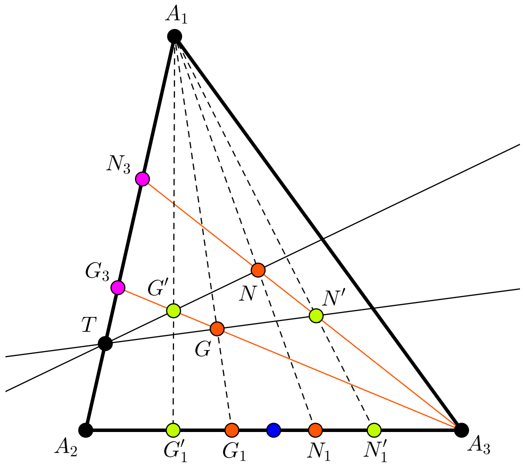


Szerkesszük meg az OF_2, OF_3 oldalfelező merőlegeseket ($2 \cdot 5$ D\$ $= 10$ D\$). Ezek a körülírt kört az A_1A_3 és A_1A_2 oldalakhoz tartozó ívek felezőpontjaiban metszik. Jelöljük ezeket rendre az M_2, N_2, M_3, N_3 pontokkal. Így behúzva az $A_2M_2, A_2N_2, A_3M_3, A_3N_3$ egyeneseket avagy belső és külső szögfelezőket ($4 \cdot 5$ D\$ $= 20$ D\$) megszerkesztettük a beírt kör, illetve a hozzáírt körök középpontjait. Jelöljük ezeket az I, J_1, J_2, J_3 pontokkal. Az $A_2'I$ egyenes messe a körülírt kört másodszorra I'-ben (5 D\$). Ekkor az (A_2II') kör éppen az A_2I átmérőjű kör lesz (hiszen az $90° = A_2I'A_2'\angle = A_2I'I\angle$), így ez az A_2A_1, A_2A_3 oldalakat a beírt kör érintési pontjaiban metszi el (10 D\$). Ezeket összekötve a szemközti csúcsokkal meg is van a Gergonne-pont ($2 \cdot 5$ D\$ $= 10$ D\$). Hasonlóan járunk el a hozzáírt köröknél. Az $A_3'J_2$ egyenes messe el a körülírt kört J_2'-ben (5 D\$), majd rajzoljuk meg az $(A_3J_2J_2')$ kört (10 D\$), ami éppen az A_3J_2 átmérőjű kör lesz, azaz az A_1A_3 oldalt a J_2 pont vetületében, avagy a hozzáírt kör érintési pontjában metszi el másodszorra. Hasonlóan megtehetjük ezt J_3-ra (5 D\$ + 10 D\$ = 15 D\$), és a két érintési pontot összekötve a szemközti csúcsokkal meg is kapjuk a Nagel-pontot ($2 \cdot 5$ D\$ $= 10$ D\$).



Valóban $50 + 5 + 30 + 5 + 5 + 10 + 10 + 20 + 5 + 10 + 10 + 5 + 10 + 15 + 10 = 200$ D\$ volt a költésünk, így maradt még 10 D\$. A maradék 10 D\$ feléből vegyünk vírusírtót, a másik fele még később kelleni fog.

Térjünk rá arra, hogy hogyan is tudunk most új izotómikus párt készíteni. Vegyünk egy tetszőleges G' pontot az A_3G egyenesnek azon részén, ami a háromszög belsejébe esik. Az NG' egyenes messe az A_1A_2 oldalegyenest T-ben, továbbá a TG egyenes messe az A_3N egyenest N'-ben ($2 \cdot 5$ D\$ $= 10$ D\$). Belátjuk, hogy a G', N' pontok is izotómikusak.



Logikai szimmetria miatt elég igazolnunk, hogy G_1', N_1' szimmetrikusak az A_2A_3 oldal felezőpontjára. Vegyük észre, hogy $(A_2, A_3; G_1, G_1') \stackrel{A_1}{=} (G_3, A_3; G, G') \stackrel{T}{=} (N_3, A_3; N'; N) \stackrel{A_1}{=} (A_2, A_3; N_1', N_1) = (A_3, A_2; N_1, N_1')$. Ha G_1^* jelöli G_1' tükörképét az A_2A_3 oldal felezőpontjára, akkor mivel a centrális tükrözés kettősviszony-tartó, $(A_2, A_3; G_1, G_1') = (A_3, A_2; N_1, G_1^*)$. Így, $(A_3, A_2; N_1, N_1') = (A_3, A_2; N_1, G_1^*)$, tehát $N_1' = G_1^*$. Ezt akartuk belátni. Egyetlen dologra kell ügyelni: hogy T létezzen. Ezt biztosítani tudjuk azzal, hogy T-t választjuk az A_1A_2 oldal belsejében. Csak az lehet gond, ha éppen a $GN \cap A_1A_2$ metszéspontot választjuk ki. Ezt el tudjuk azzal kerülni, hogy megszerkesztjük a GN egyenest (5 D\$).