XVII. DÜRER VERSENY

F KATEGÓRIA

MEGOLDÁSOK

HELYI FORDULÓ – 2023.11.24.

# 1. feladat

Ahogy a kis test mozog a hasáb körül, egyre több kötél tekeredik a hasábra, így egyre rövidebb az a darab, ami a test forgatásában ténylegesen részt vesz. A kötél hossza mindig akkor csökken, amikor hozzáér egy csúcshoz, hiszen a hasáb alapja konvex. Így a mozgás ezen pontjain megnő a kis test szögsebessége, és nő a kötélben ébredő erő is, végül ezért szakad el.

Mivel a testre a mozgás síkjában csak a sebességére merőleges kötélerő hat, így felírható a mechanikai energiamegmaradás törvénye; azaz $\Theta_i\omega_i^2/2$ állandó, ahol $\Theta_i$ a test tehetetlenségi nyomatéka, $\omega_i$ pedig szögsebessége, mindkettő az $i$. csúcsra, mint aktuális forgástengelyre vonatkozóan. A mozgási energia a folyamat elején, a 0. csúcs körüli forgás során:

$$\frac{1}{2}\Theta_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}mL^2\omega^2. \tag{1.1}$$

Most nézzük meg, hogy mi történik az elszakadás pillanatában! Jelölje $l$ a sokszög egy oldalának hosszát, ahol $l = K/n$. A kötél tekeredése miatt a $j$. csúcsnál a kis test $L - jl$ távolságra lesz ettől a csúcstól, mert $jl$ hosszúságú kötél már feltekeredett a hasábra. Írjuk fel ebben a csúcsban a kis test mozgási energiáját, és használjuk ki, hogy ez egyenlő az imént felírt kezdeti energiával:

$$\frac{1}{2}\Theta_j\omega_j^2 = \frac{1}{2}m(L-jl)^2\omega_j^2 = \frac{1}{2}mL^2\omega^2. \tag{1.2}$$

Innen $\omega_j$ kifejezhető:

$$\omega_j = \frac{L\omega}{L-jl}. \tag{1.3}$$

A kötélben ébredő erő tartja körpályán a kis testet, azaz biztosítja a centripetális gyorsulást. Ez az erő a $j$. csúcsnál

$$F_k = m(L-jl)\omega_j^2, \tag{1.4}$$

amelybe az (1.3) egyenletet behelyettesítve:

$$F_k = m(L-jl)\frac{L^2\omega^2}{(L-jl)^2} = \frac{mL^2\omega^2}{L-jK/n}. \tag{1.5}$$

Erről az erőről tudjuk, hogy éppen $F$, hiszen pont a $j$. csúcshoz érve szakad el a kötél. Így felírható, hogy:

$$\frac{mL^2\omega^2}{L-jK/n} = F. \tag{1.6}$$

Az egyenletet rendezve kapjuk a végeredményt:

$$\boxed{n = \frac{KFj}{LF - mL^2\omega^2}}. \tag{1.7}$$

## Megjegyzés

A fentieken túl érdemes kitérni egy gyakran felmerülő hibára. Látszólag azonosan igaz a következő három állítás: mivel a testre csak a sebességére merőleges erő hat, ezért

- mozgási/forgási energiája
- sebességének nagysága
- perdülete

megmarad. Ezek közül az első két állítás ekvivalens, és azonos egyenletekre is vezet. A harmadik állítás viszont hibás, bár a hibát elsőre nehéz észrevenni.

A hiba abban rejlik, hogy a megfigyelési pontunkat mindig áthelyezzük a frissen érintett csúcsra. Gondoljunk bele: ha a test az $i$. csúcs körül, attól $L_i$ távolságra, $v_i$ sebességgel forog, majd az $(i+1)$. csúcsot érinti, akkor $v_i$ nem változik ugrásszerűen. Sajnos a hibásan felírt perdületmegmaradás viszont rossz eredményre vezet:

$$mv_iL_i = mv_{i+1}L_{i+1} = mv_{i+1}(L_i - K/n) \quad\implies\quad v_{i+1} = \frac{L_iv_i}{L_i - K/n}.$$

A hiba abban rejlik, hogy a fenti perdületek kiszámításakor koordinátarendszert váltottunk. Bár a test sebességének nagysága állandó, az új koordinátarendszerben közelebb van az origóhoz, így perdülete a két rendszerben különböző. (Megjegyzendő, hogy nem létezik olyan koordinátarendszer, melyben a perdület megmarad, mivel nincs olyan pont, amelyre vonatkozóan a kötélerő forgatónyomatéka minden pillanatban zérus.)

Koordinátarendszert persze az energiamegmaradásra és a sebességmegmaradásra hivatkozó érveléseknél is váltunk, de ott ez mégsem okoz hibát. Ennek oka, hogy a szóban forgó rendszerek egymáshoz képest nem mozognak, így a sebességek nagyságai – és így az energiák is – mindegyikben megegyeznek.

## 2. feladat

A megoldás első lépéseként gondoljuk végig, hogy a kötél mely keresztmetszetében lép fel a minimális, illetve maximális húzóerő! Tudjuk, hogy erő csak a kötél irányában ébredhet, ebből következik, hogy a jobb oldali végpontban fellépő húzóerő éppen vízszintes. Mivel a felhalmozódott hó tömegéből származó erőhatás függőleges irányú, és más külső erő nem hat a rendszerre, a kötélben keletkező húzóerő vízszintes komponense minden keresztmetszetben megegyezik. Az előzőekből egyértelműen következik, hogy a minimális kötélerő éppen a jobb oldali végpontban lép fel, míg a maximális érték a bal oldali végpontban keletkezik (hiszen a kötél érintőjének meredeksége, és így a függőleges irányú erőkomponens itt a legnagyobb).

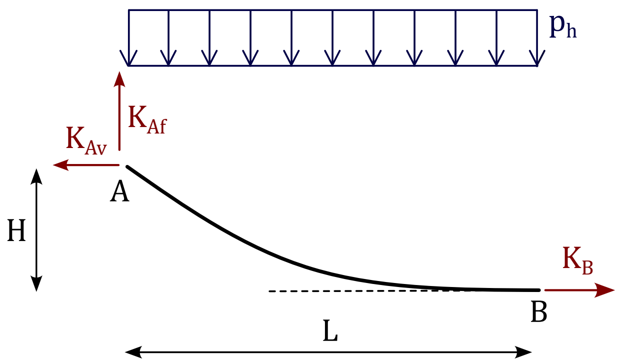
A fentiek alapján rajzoljuk fel a kötélre ható erőket, ezt szemlélteti a 2.1. ábra. Jelölje a kötél bal oldali végpontját $A$, jobb oldali végpontját pedig $B$! Ekkor az $A$ pontban fellépő húzóerő komponensei legyenek $K_{A,\mathrm{f}}$ és $K_{A,\mathrm{v}}$, a $B$ pontban keletkező húzóerőt pedig jelölje $K_B$. A felhalmozódott hó hatásából származó erőhatást egy, a kötél vízszintes vetületén egyenletesen megoszló $p_\mathrm{h} = \varrho g d h$ sűrűségű erőként kezelhetjük.

A továbbiakban vizsgáljuk a kötél, mint kiterjedt test egyensúlyát! Ekkor tudjuk, hogy a kötélre ható erők, valamint forgatónyomatékok eredőjének bármely pontra nézve zérusnak kell lennie. Felírva vízszintes irányban az erők eredőjére vonatkozó feltételt:

$$K_{A,\mathrm{v}} = K_B, \tag{2.1}$$

valamint függőleges irányban:

$$K_{A,\mathrm{f}} = p_\mathrm{h} L = \varrho g d h L. \tag{2.2}$$




2.1. ábra. A kötélre ható erők szemléltetése.

Írjuk fel a testre ható forgatónyomatékokat az $A$ pontra:

$$K_B H = \frac{p_\mathrm{h} L^2}{2}, \tag{2.3}$$

beírva $p_\mathrm{h}$ kifejezését, majd $K_B$-re rendezve:

$$K_B = \frac{\varrho g d h L^2}{2H}. \tag{2.4}$$

Azaz a kötélben keletkező minimális húzóerő:

$$\boxed{K_\mathrm{min} = K_B = \frac{\varrho g d h L^2}{2H}}, \tag{2.5}$$

a fellépő maximális erő pedig a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$\boxed{K_\mathrm{max} = \sqrt{K_{A,\mathrm{v}}^2 + K_{A,\mathrm{f}}^2} = \frac{\varrho g d h L}{2H}\sqrt{4H^2 + L^2}}. \tag{2.6}$$

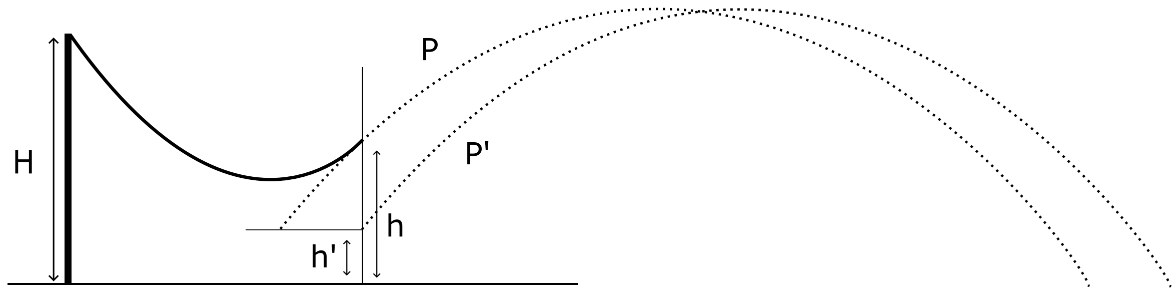
## 3. feladat

A vízbeérés távolsága három dologtól függ: az emberek sebességétől a csúszda végénél, a sebességvektor vízszintessel bezárt szögétől, valamint a végpont magasságától. A csúszda vége legyen $h$ magasan, ekkor ez a magasság az energiamegmaradás miatt egyértelműen meghatározza az ember sebességének nagyságát, hiszen a torony tetején lévő helyzeti energia alakul át helyzeti és mozgási energia összegévé.

Most a 3.1. ábra segítségével belátjuk, hogy ha a csúszda vége $h > 0$ magasságban van, akkor az emberek nem tudnak olyan messzire repülni, mintha $h'$ magasan lenne, ahol $0 \leq h' < h$.

Vegyük észre, hogy ebből már következik, hogy akkor jutnak legmesszebbre az emberek, ha a csúszda vége a talajon van. Az állítás bizonyításához használjuk fel, hogy a csúszda elhagyását követően az emberek parabolapályán mozognak. Ha a csúszda vége $h$ magasan van, akkor jelölje ezt a parabolát $P$. Ennek a csúszda végpontja előtt van $h'$ magasságban lévő pontja. Amennyiben ebben a pontban érne véget a csúszda a $P$ parabolát érintve, akkor a kirepülő emberek éppen $P$-n mozognának. Így a $D$ távolságban, $h'$ magasságban, és az előzővel egyező szögben véget érő csúszdából kirepülő emberek pályája $P$-nek egy eltoltja, $P'$. Mivel a pályát ekkor „távolabb toljuk” a toronytól, így nyilván messzebb érnek vizet az emberek.

A fentiekben beláttuk, hogy a csúszda végének a földön kell lennie. Ekkor a kirepülés sebessége egyértelműen meghatározott, és ismert, hogy a talajról indított ferde hajítás esetén a repülő test akkor megy a legmesszebbre, ha 45°-ban hajítjuk. Tehát Bélának úgy kell beállítani a csúszdát, hogy a vége a talajon legyen, és 45°-ot zárjon be a vízszintessel. (Ez megoldható például úgy, hogy a csúszda a vége előtt lemegy a föld alá.)




3.1. ábra. Különböző magasságokból kirepülő emberek pályája.

# 4. feladat

## (a)

Első lépésként írjuk fel a folyadék által felvett hőmennyiséget, miközben hőmérséklete $\Delta T$ értékkel változik:

$$\Delta Q = c(T(t))m\Delta T, \tag{4.1}$$

majd osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a folyamathoz szükséges $\Delta t$ idővel:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = c(T(t))m\frac{\Delta T}{\Delta t}. \tag{4.2}$$

Ekkor az egyenlet bal oldalán éppen a keresett teljesítményt kapjuk, míg a jobb oldalon megjelenik a hőmérsékletváltozás és az eltelt idő hányadosa, mely a feladat feltételeiből következően egy konstans érték. Ezeket felhasználva a fenti egyenlet a következő alakban írható:

$$P(t) = c(T(t))m\frac{T_2 - T_1}{t_0}. \tag{4.3}$$

Azaz a kérdés megválaszolásához még a hőmérsékletfüggő fajhő időbeli alakulására kell feltételt megfogalmaznunk. A megadott grafikon alapján először írjuk fel a fajhő hőmérsékletfüggését, azaz az egyenes egyenletét:

$$c(T(t)) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{T_2 - T_1}\left(T(t) - T_1\right). \tag{4.4}$$

Az egyenletes hőmérsékletnövelés feltételét kihasználva a $T$ hőmérséklet időfüggése a következő alakban írható:

$$T(t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{t_0} t. \tag{4.5}$$

A (4.4) és (4.5) egyenleteket beírva (4.3)-ba a keresett teljesítményfüggvény:

$$P(t) = c_1 m \frac{T_2 - T_1}{t_0} + (c_2 - c_1) m \frac{T_2 - T_1}{t_0^2} t, \tag{4.6}$$

behelyettesítve:

$$\boxed{P(t) = 3200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} + 1{,}067\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{t}}\,. \tag{4.7}$$

### (b)

A melegítés során a folyadék által felvett hő a 100 %-os hatásfoknak köszönhetően megegyezik a fűtőszál által közölt energiával. Utóbbi kiszámítható, mint a tömeg és a megadott $c(T)$ görbe alatti, $T_1$ és $T_2$ helyek közti területének szorzata. A trapéz területének képlete szerint:

$$Q_\mathrm{f} = \frac{c_1 + c_2}{2} m (T_2 - T_1), \tag{4.8}$$

a megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{Q_\mathrm{f} = 1008\,\mathrm{kJ}}\,. \tag{4.9}$$

## 5. feladat

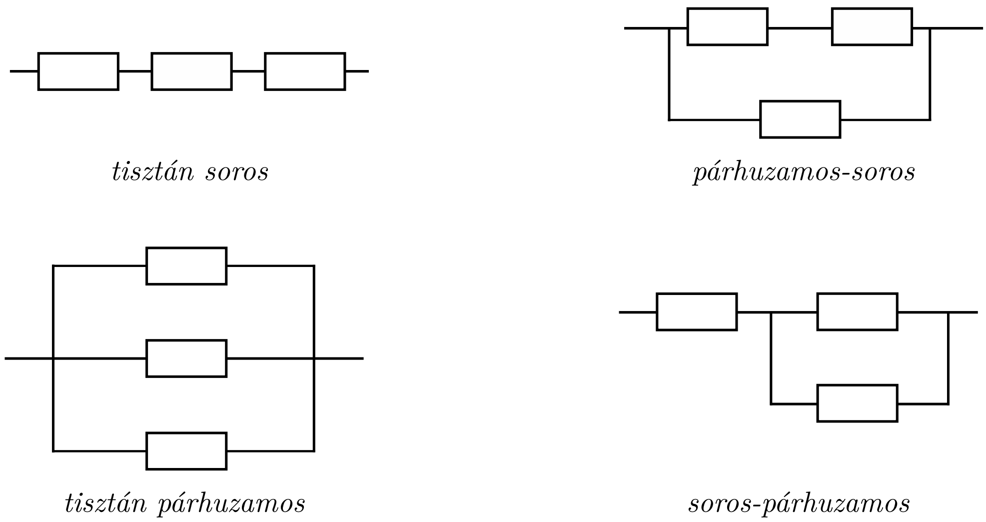
### (a)

A megadott módon három ellenállással összesen négy különböző feketedoboz hozható létre, amelyek az 5.1. ábrán láthatóak.

### (b)

A Wheatstone-híd elméletéből ismert (valamint a Négyjegyű függvénytáblázatban is megtalálható), hogy a feladatban adott elrendezés esetén csak akkor nem mutat áramot az ampermérő, ha az ellenállások aránya:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{5.1}$$




5.1. ábra. A lehetséges áramköri elrendezések.

A fenti négy feketedoboz eredő ellenállása rendre: $3R$, $2R/3$, $3R/2$ és $R/3$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti egyenletet csak akkor lehet kielégíteni, ha $R_1 = 3R$, $R_2 = 2R/3$, $R_3 = 3R/2$ és $R_4 = R/3$, vagy ha $R_1 = 3R$, $R_2 = 3R/2$, $R_3 = 2R/3$, $R_4 = R/3$. Látható, hogy mindkét esetben a jobb alsó ellenállás:

$$\boxed{R_4 = \frac{R}{3}}. \tag{5.2}$$