1. feladat

Vizsgáljuk meg első körben a rugalmatlan ütközések dinamikáját, azaz tekintsünk két m tömegű testet, amelyek ütközés előtti sebességei v_1 és v_2, ütközés utáni sebességei pedig u_1 és u_2. Teljesül egyrészt az impulzusmegmaradás törvénye, amelyből, a közös tömeggel egyszerűsítve:

$$v_1 + v_2 = u_1 + u_2. \tag{1.1}$$

A két test relatív sebessége az ütközés során előjelet vált, nagyságuk pedig csökken a k ütközési számnak megfelelően:

$$k(v_1 - v_2) = u_2 - u_1. \tag{1.2}$$

Az (1.1) és (1.2) egyenleteket egymással összeadva, illetve egymásból kivonva a következő transzformációs formulákra jutunk:

$$u_1 = q_- v_1 + q_+ v_2, \tag{1.3a}$$

$$u_2 = q_+ v_1 + q_- v_2, \tag{1.3b}$$

ahol bevezettük a $q_\pm = (1 \pm k)/2$ egyszerűsítő jelöléseket, esetünkben $q_+ = 3/4$ és $q_- = 1/4$. Érdemes megvizsgálni azt is, mennyivel csökken a rendszer mozgási energiája egy ilyen ütközés során:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2}(u_1^2 + u_2^2 - v_1^2 - v_2^2) = -mq_+q_-(v_1 - v_2)^2 = \frac{m}{4}(k^2 - 1)(v_1 - v_2)^2. \tag{1.4}$$

A mozgási energia tehát a kezdeti relatív sebesség négyzetével arányosan csökken, esetünkben a szorzótényező $m(k^2 - 1)/4 = -3m/16$.

(a)

Az (1.3) egyenleteket felhasználva a feladatban feltett kérdés már könnyedén megválaszolható. Sorszámozzuk a golyókat balról jobbra ($1 \leq n \leq 5$), és jelölje az első golyó vízszintes sebességét a legelső ütközés előtt v. Az ütközés során sebességének q_+v részét átadja a második golyónak, a maradék q_-v részét pedig megtartja. Ezután a második golyó ütközik a harmadikkal, utóbbi $q_+^2 v$ sebességet szerez, és így tovább. Ezek alapján a golyók sebességei jobb oldali szomszédjukkal való ütközés előtt

$$v_n = (q_+)^{n-1} v, \quad \text{ahol} \quad 1 \leq n \leq 5, \tag{1.5}$$

utána pedig:

$$u_n = q_- \left(q_+\right)^{n-1} v, \quad \text{ahol} \quad 1 \leq n \leq 4. \tag{1.6}$$

Mivel az ingamozgás kis kitérésű, az amplitúdó és a maximális sebesség arányos egymással, az arányossági tényező az $\omega = \sqrt{g/\ell}$ körfrekvencia. Ezt és az (1.5) egyenletet kihasználva adódik a végeredmény:

$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{1+k}{2}\right)^4 \approx 0{,}316}. \tag{1.7}$$

(b)

A $k = 1$ esetben ismert, hogy az ütközések száma $N - 1 = 4$. Furcsamód azonban ez megváltozik, amennyiben k akár csak egy hajszálnyival is kisebb 1-nél. Hogy ezt megértsük, induljunk ki az (1.5) és (1.6) egyenletekből, és vegyük észre, hogy $u_1 > u_2 > u_3 > u_4$, továbbá $v_5 > u_1$. Ezen relációk következménye, hogy bár az (a) feladatrészben tárgyalt négy ütközés valóban végbe megy, de azután rövid időn belül az első golyó utoléri a másodikat, és újból ütközik vele. A relatív sebességük előjele ekkor (1.2) miatt megváltozik, így ezt követően már a második golyó a gyorsabb, ez hamarosan utoléri a harmadikat, és így tovább. Összességében tehát újabb ütközések jönnek létre, bonyolult mintázatot létrehozva. Az mindenesetre biztos, hogy a tökéletesen rugalmas esetben használt szemléletes érvelés itt nem érvényes.

(c)

A rendszer egészen addig bonyolult, ütközésekkel teli mozgást végez, amíg végül mindegyik test sebessége közel azonossá nem válik. Ez látható például az (1.4) egyenletből: az energia monoton csökkenő függvénye az ütközések számának, egyúttal biztosan nemnegatív, így határértékkel rendelkezik. Mivel ΔE_{kin} minden ütközésnél arányos a relatív sebesség négyzetével, a határérték tetszőlegesen csak akkor közelíthető meg, ha a relatív sebességek kellően kicsik.

Az egyensúly feltétele tehát, hogy az egyes ingák azonos fázisú harmonikus rezgést végeznek, amelyek maximális sebességét jelölje w. A korábban felírt (1.1) egyenlet alapján az ingamozgás legmélyebb pontjában vett sebességösszeg állandó a mozgás során, így látható, hogy $w = v/5$. Hasonlóan az egyensúlyi helyzetben vett amplitúdóra:

$$\boxed{\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{5} = 0{,}2}, \tag{1.8}$$

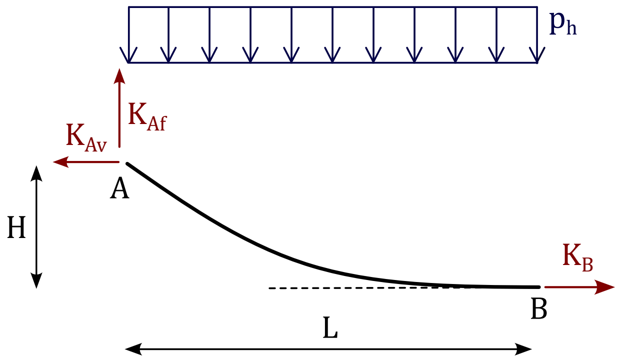
amely meglepő módon független az ütközési számtól. További érdekesség, hogy ugyanezt az eredményt kapnánk a teljesen rugalmatlan ütközés $k = 0$ határesetében is, ekkor viszont az egyensúlyi állapot már négy ütközés után létrejön.

2. feladat

A megoldás első lépéseként gondoljuk végig, hogy a kötél mely keresztmetszetében lép fel a minimális, illetve maximális húzóerő! Tudjuk, hogy erő csak a kötél irányában ébredhet, ebből következik, hogy a jobb oldali végpontban fellépő húzóerő éppen vízszintes. Mivel a felhalmozódott hó tömegéből származó erőhatás függőleges irányú, és más külső erő nem hat a rendszerre, a kötélben keletkező húzóerő vízszintes komponense minden keresztmetszetben megegyezik. Az előzőekből egyértelműen következik, hogy a minimális kötélerő éppen a jobb oldali végpontban lép fel, míg a maximális érték a bal oldali végpontban keletkezik (hiszen a kötél érintőjének meredeksége, és így a függőleges irányú erőkomponens itt a legnagyobb).

A fentiek alapján rajzoljuk fel a kötélre ható erőket, ezt szemlélteti a 2.1. ábra. Jelölje a kötél bal oldali végpontját A, jobb oldali végpontját pedig B! Ekkor az A pontban fellépő húzóerő komponensei legyenek $K_{A,\text{f}}$ és $K_{A,\text{v}}$, a B pontban keletkező húzóerőt pedig jelölje K_B.

A felhalmozódott hó hatásából származó erőhatást egy, a kötél vízszintes vetületén egyenletesen megoszló $p_\mathrm{h} = \varrho g d h$ sűrűségű erőként kezelhetjük.



2.1. ábra. A kötélre ható erők szemléltetése.

A továbbiakban vizsgáljuk a kötél, mint kiterjedt test egyensúlyát! Ekkor tudjuk, hogy a kötélre ható erők, valamint forgatónyomatékok eredőjének bármely pontra nézve zérusnak kell lennie. Felírva vízszintes irányban az erők eredőjére vonatkozó feltételt:

$$K_{A,\mathrm{v}} = K_B, \tag{2.1}$$

valamint függőleges irányban:

$$K_{A,\mathrm{f}} = p_\mathrm{h} L = \varrho g d h L. \tag{2.2}$$

Írjuk fel a testre ható forgatónyomatékokat az A pontra:

$$K_B H = \frac{p_\mathrm{h} L^2}{2}, \tag{2.3}$$

beírva p_h kifejezését, majd K_B-re rendezve:

$$K_B = \frac{\varrho g d h L^2}{2H}. \tag{2.4}$$

Azaz a kötélben keletkező minimális húzóerő:

$$\boxed{K_\mathrm{min} = K_B = \frac{\varrho g d h L^2}{2H}}, \tag{2.5}$$

a fellépő maximális erő pedig a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$\boxed{K_\mathrm{max} = \sqrt{K_{A,\mathrm{v}}^2 + K_{A,\mathrm{f}}^2} = \frac{\varrho g d h L}{2H}\sqrt{4H^2 + L^2}}. \tag{2.6}$$

3. feladat

(a)

A feladat megoldása során használjuk fel a vízvezetékrendszeri modell és az elektromos hálózatok között felfedezhető analógiát! Ez alapján a túlnyomás megfeleltethető a potenciálnak (nullszintként a légköri nyomást választva), a vízhozam az áramerősségnek, az egyes csöveket és a csapokat jellemző vízszállító-képességek pedig az elektromos vezetőképességnek. Ezt felhasználva alkalmazhatjuk az egyszerű áramköröknél megszokott törvényszerűségeket.

A megadott T_0 kifolyó vízhőmérséklet segítségével meghatározhatjuk, hogy a meleg- és hidegvizes ágból milyen vízhozammal szükséges érkeznie a víznek a zuhanyba:

$$T_0 = \frac{T_\mathrm{m} Q_\mathrm{m} + T_\mathrm{h} Q_\mathrm{h}}{Q_0}, \tag{3.1}$$

valamint tudjuk, hogy:

$$Q_0 = Q_\mathrm{m} + Q_\mathrm{h}, \tag{3.2}$$

azaz, összefoglalva a két egyenletet, az egyes vízhozamok:

$$Q_\mathrm{m} = \frac{T_0 - T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{m} - T_h} Q_0 = 3{,}64\,\frac{\text{liter}}{\text{perc}}, \tag{3.3a}$$

$$Q_\mathrm{h} = \frac{T_\mathrm{m} - T_0}{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{h}} Q_0 = 6{,}36\,\frac{\text{liter}}{\text{perc}}. \tag{3.3b}$$

Egy huroktörvénnyel analóg összefüggést felírva a melegvizes ágra:

$$\frac{Q_\mathrm{m}}{G_1} + \frac{Q_\mathrm{m}}{G_\mathrm{m}} = p_\mathrm{m}, \tag{3.4}$$

innen a G_m mennyiséget kifejezve:

$$G_\mathrm{m} = \frac{Q_\mathrm{m} G_1}{p_\mathrm{m} G_1 - Q_\mathrm{m}}, \tag{3.5}$$

majd a (3.3a) egyenletet felhasználva, és behelyettesítve:

$$\boxed{G_\mathrm{m} = 0{,}96\,\frac{\text{liter}}{\text{bar} \cdot \text{perc}}}. \tag{3.6}$$

Az előzőekhez teljesen hasonló módon a hidegvizes ágra:

$$\frac{Q_\mathrm{h}}{G_3} + \frac{Q_\mathrm{h}}{G_2} + \frac{Q_\mathrm{h}}{G_\mathrm{h}} = p_\mathrm{h}, \tag{3.7}$$

innen a G_h mennyiséget kifejezve:

$$G_\mathrm{h} = \frac{Q_\mathrm{h} G_2 G_3}{p_\mathrm{h} G_2 G_3 - Q_\mathrm{h}(G_2 + G_3)}, \tag{3.8}$$

majd a (3.3b) egyenletet felhasználva, és behelyettesítve:

$$\boxed{G_\mathrm{h} = 4{,}94\,\frac{\text{liter}}{\text{bar} \cdot \text{perc}}}. \tag{3.9}$$

(b)

A WC lehúzásakor a melegvizes ágban semmilyen változás nem történik, onnan továbbra is az előző részben kiszámolt Q_m vízhozammal áramlik a zuhanyba a T_m hőmérsékletű melegvíz. A hidegvizes ágban azonban a WC csap megnyitásával keletkezik egy elágazás a rendszerben, kevesebb hidegvíz fog a zuhanyhoz áramolni, így az összességében kifolyó víz magasabb hőmérsékletű lesz.

Első lépésként határozzuk meg az elágazási pontban kialakult túlnyomást, jelölje ezt p_x! Ehhez írjunk fel egy csomóponti törvénnyel analóg összefüggést erre a pontra:

$$(p_\mathrm{h} - p_\mathrm{x})G_3 = p_\mathrm{x}\frac{G_2 \cdot G_\mathrm{h}}{G_2 + G_\mathrm{h}} + p_\mathrm{x}G_4, \tag{3.10}$$

innen a keresett túlnyomás:

$$p_\mathrm{x} = \frac{G_3}{\frac{G_2 \cdot G_\mathrm{h}}{G_2 + G_\mathrm{h}} + G_3 + G_4}\, p_\mathrm{h} = 2{,}91\,\mathrm{bar}. \tag{3.11}$$

A p_x túlnyomás ismeretében felírva egy huroktövényt a zuhany ágára:

$$\frac{Q'_\mathrm{h}}{G_2} + \frac{Q'_\mathrm{h}}{G_\mathrm{h}} = p_\mathrm{x}, \tag{3.12}$$

tehát az új vízhozam a zuhany hidegvizes ágában:

$$Q'_\mathrm{h} = \frac{G_2 G_\mathrm{h}}{G_2 + G_\mathrm{h}}\, p_\mathrm{x} = 5{,}44\,\frac{\mathrm{liter}}{\mathrm{perc}}. \tag{3.13}$$

A kialakult új vízhőmérséklet:

$$T'_0 = \frac{T_\mathrm{m}Q_\mathrm{m} + T_\mathrm{h}Q'_\mathrm{h}}{Q'_0} = \frac{T_\mathrm{m}Q_\mathrm{m} + T_\mathrm{h}Q'_\mathrm{h}}{Q_\mathrm{m} + Q'_\mathrm{h}}, \tag{3.14}$$

amely behelyettesítés után, számértékileg:

$$\boxed{T'_0 = 37{,}0\,^\circ\mathrm{C}}. \tag{3.15}$$

4. feladat

Az elektromos dipól modellezéséhez induljunk ki egy q és egy $-q$ töltésből képzett párból, amelyek egymástól d távolságra helyezkednek el. Ha vesszük a $d \to 0$, $q \to \infty$ határértékeket a $p = qd$ konstans feltétel mellett, akkor megkapjuk az ideális dipólust. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik a tükörtöltésekkel a limesz elvégzése közben!

Két tükörtöltést kell figyelembe venni. A $-q$ töltés tükörképének q_1 nagysága és a gömb középpontjától való r_1 távolsága:

$$q_1 = \frac{Rq}{r}, \qquad r_1 = \frac{R^2}{r}, \tag{4.1}$$

míg a q töltés esetén:

$$q_2 = -\frac{Rq}{r+d}, \qquad r_2 = \frac{R^2}{r+d}. \tag{4.2}$$

A gömb össztöltése a Gauss-törvény értelmében a két tükörtöltés összegével azonos:

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{Rq}{r} - \frac{Rq}{r+d} = \frac{Rqd}{r(r+d)}. \tag{4.3}$$

A fent említett határértéket véve adódik a – meglepő módon zérustól eltérő – végeredmény:

$$\boxed{Q = \frac{Rp}{r^2}}. \tag{4.4}$$

5. feladat

(a)

A feladat kulcsgondolata, hogy a fény közegbeli terjedési sebessége, és így a törésmutató is, csak az adott közeg nyugalmi rendszerében értelmezhető. Egyéb vonatkoztatási rendszerekben a fényterjedés, és így a fénytörés jelensége is, különbözni fog a megszokottaktól.

Ezt a gondolatmenetet követve tekintsünk két vonatkoztatási rendszert: a külső megfigyelő K rendszerét, ahol a folyadék v sebességgel áramlik, illetve a folyadék K' nyugalmi rendszerét. A K rendszerben a folyadékfelszínnel párhuzamos térbeli koordináta x, az arra merőleges y, az idő pedig t, továbbá a beesési szög α, a törési szög β. Hasonlóan a K' rendszert az x', y', t' koordináták és az α', β' szögek jellemzik. Érdemes ezen felül három eseményt kitüntetni: a lézernyaláb elindítását, a határfelület elérését és a mederfenék elérését. A K rendszerben ezek koordinátái rendre (x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2) és (x_3, y_3, t_3), míg a K' rendszerben (x'_1, y'_1, t'_1), (x'_2, y'_2, t'_2) és (x'_3, y'_3, t'_3). Ezek között az

$$x'_i = x_i - vt_i, \qquad y'_i = y_i, \qquad t'_i = t_i \tag{5.1}$$

Galilei-transzformáció teremt kapcsolatot minden $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén.

Mivel a vákuumbeli fénysebesség vonatkoztatási rendszertől független, a folyadék nyugalmi rendszerében érvényes a Snellius–Descartes-törvény:

$$\sin\alpha' = n \sin\beta'. \tag{5.2}$$

Fejezzük ki az egyenlet bal oldalát az α szög segítségével! Ehhez első lépésben használjuk fel az (5.1) Galilei-transzformációt:

$$\sin\alpha' = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}} = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{\left[x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)\right]^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \tag{5.3}$$

Jelölje a levegőben megtett utat a K rendszerben s_{12}, ekkor $x_2 - x_1 = s_{12}\sin\alpha$, $y_2 - y_1 = s_{12}\cos\alpha$, $t_2 - t_1 = s_{12}/c$. Ezeket az (5.3) egyenletbe behelyettesítve:

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha - v/c}{\sqrt{(\sin\alpha - v/c)^2 + \cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha - v/c}{\sqrt{1 - 2v\sin\alpha/c + v^2/c^2}}. \tag{5.4}$$

A jobb oldalt v/c-ben első rendben közelíthetjük a feladatban megadott $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ összefüggés felhasználásával:

$$\sin\alpha' \approx \sin\alpha + \frac{v}{c}\left(\sin^2\alpha - 1\right). \tag{5.5}$$

Hasonló lépésekkel kifejezhetjük a $\sin\beta$ szögfüggvényt is $\sin\beta'$ segítségével, az eredmény ekkor az alábbi:

$$\sin\beta \approx \sin\beta' + \frac{nv}{c}\left(1 - \sin^2\beta'\right). \tag{5.6}$$

Az (5.2), (5.5) és (5.6) egyenletek felhasználásával végül megkapható a Snellius–Descartes-törvény K rendszerben érvényes alakja:

$$\sin\alpha + (n^2-1)\frac{v}{c} \approx n\sin\beta, \tag{5.7}$$

ahonnan adódik a keresett törési szög:

$$\boxed{\beta \approx \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n} + \frac{n^2-1}{n}\frac{v}{c}\right)}. \tag{5.8}$$

Némiképp precízebb, amennyiben az elsőrendű sorfejtést a v/c változóban itt is elvégezzük. Ez kiterjedtebb matematikai eszköztárat igényel, így a versenyzők részéről nem elvárás:

$$\beta \approx \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) + \frac{n^2-1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\frac{v}{c}. \tag{5.9}$$

(b)

A merőleges beesés $\alpha = 0°$ speciális esetében az (5.8) egyenlet alakja a következő módon egyszerűsödik:

$$\boxed{\beta_\mathrm{m} \approx \arcsin\left(\frac{n^2-1}{n}\frac{v}{c}\right)}. \tag{5.10}$$

Ekvivalens módon az (5.9) közelítésből kiindulva:

$$\beta_\mathrm{m} \approx \frac{n^2-1}{n}\frac{v}{c}. \tag{5.11}$$

A meglepő eredmény tehát az, hogy mozgó közegek esetén merőleges beesésnél is fellép némi eltérülés. A közeghatárt jellemző határszög is kiszámítható az $\alpha = 90°$ helyettesítéssel, ekkor:

$$\boxed{\beta_\mathrm{h} \approx \arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{n^2-1}{n}\frac{v}{c}\right)}. \tag{5.12}$$

Ekvivalens módon az (5.9) közelítésből kiindulva:

$$\beta_\mathrm{h} \approx \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{n^2-1}\,\frac{v}{c}. \tag{5.13}$$

Láthatóan ez szintén módosul a megszokott $\arcsin(1/n)$ formulához képest.