XVII. DÜRER VERSENY

A KATEGÓRIA

KIFEJTŐS MEGOLDÁSOK — **DÖNTŐ – 2024.01.12–13.**

A1. A rotterdami kikötőben ezer dokk van 1-től 1000-ig megszámozva. Erik, a Mars nevű hajó matróza elfelejtette, hogy melyik dokkban horgonyzik a hajója. Arra emlékszik, hogy a dokk sorszáma, illetve a sorszám számjegyeinek összege is osztható 5-tel, de a sorszám számjegyei közt nem szerepel az 5. Ezek alapján melyik dokkokban lehet a Mars nevű hajó? Írjátok fel az összes lehetséges sorszámot.

Megoldás:

A hajó dokkjának sorszáma osztható 5-tel, így az utolsó számjegy értéke csak 0 vagy 5 lehet, viszont a számjegyek között tudjuk, hogy nem szerepel 5, tehát az utolsó számjegy 0.

Emiatt nincs egyjegyű megoldás, továbbá látható, hogy kétjegyű szám, és az 1000 sem lehet megfelelő. Tehát elég a háromjegyű számok között keresgélnünk.

Egy ilyen szám első két számjegyének összege osztható 5-tel és legfeljebb $9 + 9 = 18$ lehet. Tehát ezen számjegyek összege 5, 10 vagy 15.

Ezeket a számokat az alábbi módokon tudjuk felírni két 0 és 9 közötti számjegy összegeként, ha egyik számjegy sem lehet 5:

$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 3 = 1 + 4$

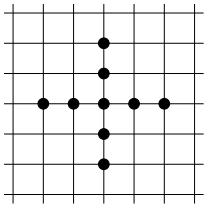
$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 4 + 6 = 3 + 7 = 2 + 8 = 1 + 9$

$15 = 9 + 6 = 8 + 7 = 7 + 8 = 6 + 9$

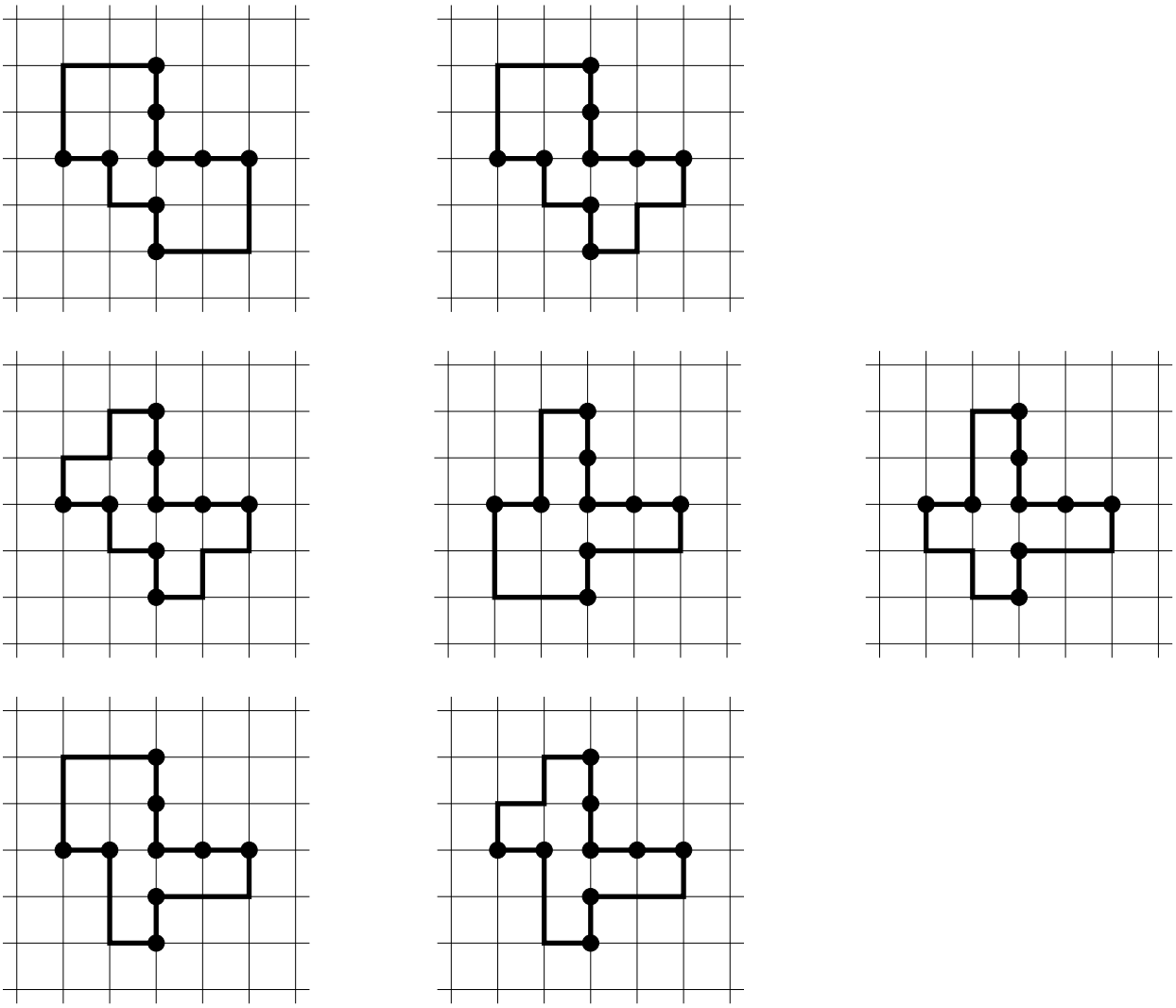
Tehát a lehetséges dokksorszámok:

$410, 320, 230, 140, 910, 820, 730, 640, 460, 370, 280, 190, 960, 870, 780, 690.$

A2. Hanga megjelölt 9 pontot a négyzetrácsos füzetében. Tomi szeretne egy olyan 16 cm kerületű sokszöget rajzolni, aminek az oldalai a rácsvonalakon haladnak és a megjelölt pontok a kerületén vannak. Mutassatok minél több különböző sokszöget, ami megfelel a feltételeknek.
Azt nem kell indokolnotok, hogy miért nincs több megoldás. Ha két sokszög forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető, akkor nem tekintjük őket különbözőnek. Az ábrán egy kis négyzet oldala 1 cm hosszú.



Megoldás:



A fent látható hét lehetőség van. Azt, hogy miért nem lehet több, nagyon macerás hiánytalanul, precízen megmagyarázni, így ezt nem tesszük meg, csak összefoglaljuk a bizonyítás fő gondolatait.
Tetszőleges rácssokszög, ami fedi a 9 megjelölt rácspontot, mind a négy irányból (fentről, lentről, jobbról, balról) nézve legalább négy szélesnek látszik. Így csak akkor lehet 16 a kerület, ha minden irányból pontosan 4 széles, és olyan oldala sem lehet a sokszögnek, amely semelyik irányban sem látszik, mert egy másik oldal kitakarja. Ebből már nem nehéz meggondolni, hogy a középső csúcsot csak úgy lehet fedni, hogy ott egy 270°-os szög van, és a két oldal, ami itt találkozik, 2 hosszú, így fednek további két-két megjelölt pontot. Mivel elég csak forgatás és tükrözés erejéig meghatározni a megoldást, így feltehetjük, hogy ez a két oldal a középső pontból jobbra és felfelé indul ki, mint ahogy

az összes felrajzolt ábrán látható.
Ezek után végig lehet próbálgatni, hogy ahhoz, hogy 16 legyen a kerület, csak ezek a megfelelő sokszögek.

A3. Egy matematika-csapatversenyen nyolc gyerek indult el négy párban. A nyolc gyerek magasság szerinti csökkenő sorrendje: Anita, Benedek, Csenge, Dani, Eszter, Ferenc, Gábor és Hanga. A verseny végén a versenyzők az alábbiakat mondták:

- Anita: Megelőztük Dani csapatát.
- Benedek: Csenge volt a párom.
- Csenge: Ferenc csapata pontosan két hellyel előzött meg minket.
- Dani: Minden olyan csapatot megelőztünk, amiben szerepelt nálam magasabb ember.
- Eszter: A közvetlenül mögöttünk végzett páros egyik tagja magasabb, másik tagja alacsonyabb nálam.
- Ferenc: Nem másodikak lettünk.
- Gábor: Megelőztük Hanga csapatát.
- Hanga: Anita és Gábor nem voltak párok.

Tudjuk, hogy a gyerekek közül pontosan egy hazudott. Ki kivel volt párban, és melyik páros hányadik helyen végzett? *Keressétek meg az egyetlen megoldást, és indokoljátok meg azt is, hogy miért nincs más megoldás. A gyerekek között nincs két azonos magasságú, és semelyik helyen nem volt holtverseny.*

Megoldás:

Dani azt mondta, hogy megelőzött minden nála magasabb embert. Anita magasabb Daninál, így Dani állítása szerint megelőzte Anitát is, Anita viszont azt mondta, hogy megelőzte Danit. A két állítás egymásnak ellentmond, így valamelyikük hazudott.

A gyerekek közül csak egy hazudott, tehát a többi versenyzőről tudjuk, hogy igazat mondott. Anita és Dani állítása közül az egyik igaz, vagyis valamelyikük megelőzte a másikat, így nem voltak egy párban. Csenge állítása szerint Ferenc két hellyel előzte meg őt, ebből tudjuk, hogy Ferenc az első vagy a második helyen végzett. Ferenc állítása szerint nem lett második, tehát Ferenc első helyen végzett, Csenge pedig két hellyel mögötte a harmadik helyen.

Benedek azt mondta, hogy Csenge volt a párja, így Benedek is harmadik helyezett lett.

Eszternél Anita, Benedek, Csenge és Dani magasabbak. Eszter tehát azt állítja, hogy a közvetlenül mögötte végzett csapatban közülük pontosan az egyikük volt benne. A harmadik helyen Benedek és Csenge csapata volt, így Eszter nem lehetett a második helyezett csapatban, illetve a negyedik helyezettben sem, hiszen az állításából következően végzett utána csapat. Tehát Eszter első helyezett lett, így Ferenc volt a párja.

Így 4 ember maradt a második és negyedik helyezett csapatokba: Anita, Dani, Gábor és Hanga.

Hanga állítása alapján Anita és Gábor nem voltak párok, illetve megállapítottuk, hogy Anita Daninak sem lehetett a párja, tehát Anita párja csak Hanga lehetett, így Daninak pedig Gábor.

Gábor állítása szerint megelőzte Hangát, így csak Gábor és Dani csapata lehetett a második, Hanga és Anita csapata pedig a negyedik helyezett.

Tehát az egyetlen lehetséges sorrend az alábbi:

helyezés	egyik tag	másik tag
1.	Eszter	Ferenc
2.	Dani	Gábor
3.	Csenge	Benedek
4.	Hanga	Anita

Ez tényleg megoldás, mivel ebben az esetben csak Anita nem mond igazat.

A4. Egy kalózhajón felkelés tört ki. Miután az előző kapitányt otthagyták Óxisz szigetén, a legénység tagjai új kapitányt választottak maguk közül. Mindenki a legénység két különböző tagjára szavazott, és senki se szavazott magára. Összesen négy emberre érkeztek szavazatok: Arisztidra, Brúnóra, Cipriánra és Délibábra. Arisztid 1, Brúnó 26, Ciprián 3 szavazatot kapott. Hány szavazatot kaphatott Délibáb?
Soroljátok fel a lehetséges értékeket, és indokoljátok meg, hogy miért pont ezek lehetnek.

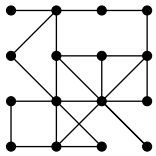
Megoldás: Jelöljük a négy jelöltet A-val, B-vel, C-vel és D-vel. Mivel mindenki két emberre szavazott, minden szavazócédulán két betű szerepel. Így összesen 1 darab A, 26 darab B, 3 darab C, és nem tudjuk, mennyi D betű került rá a szavazólapokra.
Összesen $1 + 26 + 3 = 30$ szavazat érkezett nem D-re, amiből kettőt maga D adott le, így rajta kívül legfeljebb 28 ember lehet, mert mindenki szavazott legalább egyet nem D-re. Így D legfeljebb 28 szavazatot kaphatott, mivel mindenki legfeljebb egyszer szavazott rá.
A B betű szerepel 26 szavazólapkán, és mindegyiken van mellette egy másik betű is. A-ból és C-ből összesen 4 darab van. Emellett B céduláján nem szerepel B, így legalább egy A vagy C szerepel, tehát legfeljebb 3 cédulára kerül a B mellé A vagy C. Tehát legalább 23-szor szerepel D a B mellett szavazócédulákon.
További észrevétel, hogy mivel minden szavazócédulán két név szerepel, így az összesen szavazatként leadott nevek száma páros. Mivel az A, B, C betűk száma összesen páros, így D betűből is páros számúnak kell lennie.
Mindezeket összevetve megállapíthatjuk, hogy elméletben csak 24, 26 vagy 28 szavazatot kaphatott D. Ezek tényleg mind lehetségesek az alábbi módon:

D pontosan 24 szavazatot kap:
A szavazata: B, C
B szavazata: A, C
C szavazata: B, D
D szavazata: B, C
Mindenki más (23 fő) szavazata: B, D

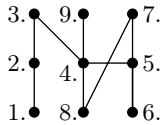
D pontosan 26 szavazatot kap:
A szavazata: B, D
B szavazata: A, D
C szavazata: B, D
D szavazata: B, C
Mindenki más (24 fő) szavazata: egy C, B, egy C, D, mindenki más B, D

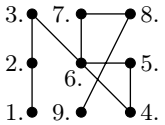
D pontosan 28 szavazatot kap:
A szavazata: C, D
B szavazata: C, D
C szavazata: B, D
D szavazata: A, C
Mindenki más (25 fő) szavazata: B, D

A5. **a)** Sohaország 16 városból áll, melyek egy 4×4-es rácsban helyezkednek el. Dani, a postás szeretné egy nap alatt kiszállítani a csomagokat, amihez meg kell látogatnia az ország összes városát. Előző este pontosan megtervezi az útját, és 1-től 16-ig beszámozza a városokat. Másnap az 1-es városból indul, és a számozás sorrendjében végigjárja az összes várost úgy, hogy mindig egyenes úton halad a városok között és végül a 16-os számú városban tölti az éjszakát. Előfordulhat, hogy az útja során érint olyan városokat, amikben már korábban járt, ám Dani úgy tervezte meg az útját, hogy sosem vezet át az útja olyan városon, ahova a sorrend szerint csak később kéne eljutnia. Lehetséges-e, hogy a Dani által megtett út a jobb oldali ábra szerint nézzen ki?
Ha lehetséges, akkor mutassatok egy megfelelő számozást, ha nem lehetséges, akkor indokoljátok, hogy miért nem lehetséges.



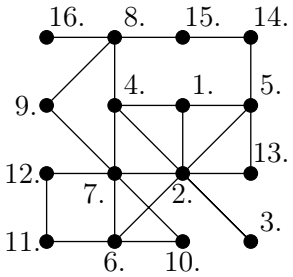
A bal oldali példában egy megfelelő számozás látható, viszont a jobb oldali példán lévő számozás nem megfelelő, mivel a 3-as városból a 4-es városba menő úton áthaladna a 6-os városon is, ahol korábban még nem járt.



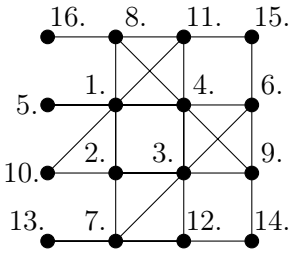


b) Daninak a születésnapján is dolgoznia kell, ezen a napon is a fent leírt szabályok szerint beszámozza, és végigjárja az összes várost. Úgy ünnepel, hogy valahányszor érint egy várost, akár először, akár többedik alkalommal, mindig betér egy fogadóba egy korsó málnaszörpre. Dani szeretné ilyen módon a lehető legtöbb korsó málnaszörpöt meginni. Mutassatok szabályos számozást, hogy Dani minél több korsó málnaszörpöt ihasson.
Azt nem kell indokolnotok, hogy miért nem tud több málnaszörpöt meginni.

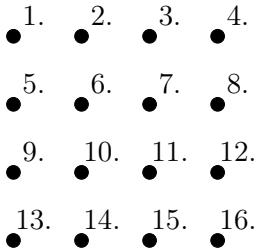
Megoldás: a)
Ez az ábra előállhat az alábbi sorrend során:



b)
Az alábbi útvonal 35-ször érint várost:



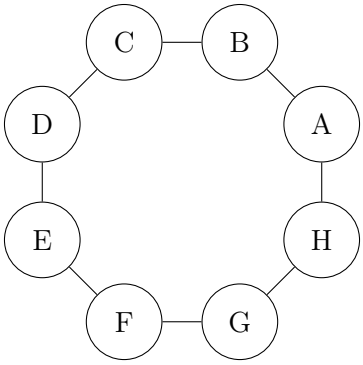
Ennél több pedig nem elérhető. Most az alábbi bizonyításban megmutatjuk, hogy 37-et nem tud elérni. Az biztos, hogy mind a 16 várost érinteni fogjuk, az a kérdés, hogy hányszor lesz olyan, hogy egy városba többször látogatunk el. Nézzük meg, hogy az egyes városok első meglátogatása előtt, amikor abba a városba megyünk egyenes úton, közben hány olyan városon megyünk át, ahol jártunk korábban. Hogy tudjunk a városokra hivatkozni, számozzuk be őket.



Az ábrán látható 6., 7., 10., 11. városokhoz csak úgy juthatunk el, hogy közben legfeljebb egy másik, korábban már látogatott városon megyünk át. A másik 12 város mindegyikénél legfeljebb két másik városon mehetünk át előtte.
Vegyük észre, hogy az 5-ös városhoz csak úgy tudunk két másik városon át eljutni, ha a 8-as városból jövünk, és a 8-as városba is csak az 5-ös városból tudunk két másik városon át menni. Mivel ez a kettő egyszerre nem teljesíthető, így ezek közül az egyik városba menet legfeljebb egy másik városon mehetünk keresztül. Ugyanez a gondolat elmondható a 2-14, 3-15 és 9-12 várospárok esetén.
Ezen kívül, ha megnézzük a négy sarkot (1, 4, 13, 16), akkor láthatjuk, hogy azokba is csak valamelyik másik sarokból tudunk eljutni úgy, hogy közben két korábban látogatott városon is kerszetülmenjünk. Vagyis abba a sarokba, ahova először megy Dani, oda menet legfeljebb egy másik várost érinthet.
Tehát legfeljebb 7 olyan város lehet, aminél két másik várost is meglátogat Dani, amikor abba a városba megy (4 város az oldalakon, és 3 város a sarkokon lévő városok közül), a többi 9 város esetén legfeljebb egy másik várost érinthetünk. Viszont látható, hogy lesz 3 olyan város, ami előtt nem fog tudni másik várost érinteni: az első város, a második város és az első olyan város, ami nincs az első és második város egyenesén. Így legfeljebb $7 \cdot 2 + 9 - 3 = 20$-szor lehet olyan, hogy olyan városba lép, ahol korábban járt. Így legfeljebb 16+20=36 málnaszörpöt ihat Dani.
Konstrukciót 35-re mutattunk, és csak azt bizonyítottuk, hogy 37-re nem lehet. A 36 esetét nem írjuk le rendesen, mert hosszadalmas, de megjegyezzük, hogy a bizonyítás végén egy kis esetvizsgálattal belátható, hogy valójában még egy város esetén mindenképpen csökkenni fog a fent bizonyított lehetséges maximum, így belátható, hogy 36 málnaszörpöt se fog tudni meginni Dani.

A6. **(Játék)** Óxisz városa egy szabályos nyolcszög alakú fallal van körülvéve, melynek szomszédos csúcsai 10 km-re vannak egymástól. A város építésze szeretne négy nap alatt mind a nyolc csúcsba egy-egy őrtornyot építeni, ám ezt a banditák szeretnék megakadályozni. Az építész úgy építi a tornyokat, hogy ha napközben az útja során (akár az elején vagy a végén) érint egy csúcsot, ahol még nincs torony, akkor elhelyez oda egyet.
Az építész az A-val jelölt csúcsból indul, csak a várfalakon mozoghat, minden nap legfeljebb 40 km-t tud megtenni és az éjszakát a várfal egyik csúcsánál kell töltenie. Ezután éjszaka a banditák kiválaszthatnak egy csúcsot, és az ott lévő tornyot lerombolhatják. Az építész akkor nyer, ha a negyedik napon napnyugtakor mind a nyolc csúcsban áll egy-egy torony, ellenkező esetben a banditák győznek.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy az építész vagy a banditák bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nevezzük el a csúcsokat az A-val jelölttől sorban A, B, C, D, E, F, G, H-val az ábra szerint.



A játékban az építésznek van nyerő stratégiája. Az építész útvonala az első nap legyen A → B → C → D → E. Ezek után a banditáknak 5 lehetősége van.
Ha a banditák az A vagy E tornyot rombolják le az első éjszaka, akkor az építész a második nap minden tornyot megépítheti, hiszen elegendő végigmennie az E → F → G → H → A útvonalon. Ezek után, a későbbi napokon bármit is rombolnak a banditák, másnap vissza tudja építeni az építész, így a negyedik nap napnyugtakor nyer.
Ha a banditák a C tornyot rombolják le, akkor menjen végig az építész a második lépésében az E → F → G → H → G csúcsokon, ha pedig az első lépés után a D-t rombolják le, akkor pedig az építész menjen az E → F → G → H csúcsokon. (Vagyis mindkét esetben az az ötlet, hogy pont azzal a csúccsal szemközt álljon meg, amit leromboltak a banditák.) Ezek után a banditák bármit is rombolnak le, az építész a harmadik nap végére mindent meg tud építeni. Ahogy az előző esetben is, ekkor a negyedik napra is el tudja érni, hogy minden torony meg legyen építve, így nyer.
Végül, ha a banditák a B tornyot rombolják le az első nap után, akkor az építész lépje a következőt: E → F → G → H → A. Ezek után ha a banditák az A, C, D vagy E-t rombolják, akkor az építész már a harmadik estére mindent meg tud építeni, és ahogy korábban láttuk, így nyer. Ha pedig az F, G vagy H-t rombolják, akkor lépjen úgy az építész, hogy először megépíti a B-t, és utána a lerombolt toronnyal átellenesen áll meg. Ekkor bármit is rombolnak a harmadik éjszaka a banditák, az építész meg tud mindent építeni a negyedik nap végére.