XVII. DÜRER VERSENY

A KATEGÓRIA

VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

DÖNTŐ – 2024.01.12–13.

A1. A mai nap leírásában (2024. 01. 13.) minden számjegy szerepel 0-tól 4-ig. Hány nap múlva lesz a következő olyan nap, aminek a leírásában minden számjegy szerepel 0-tól 5-ig?

Megoldás: Ha az idei évben találunk egy ilyen napot, amit hamarosan látni fogunk, hogy lehetséges, akkor az évszám (2024) a 0, 2, és a 4 számjegyeket tartalmazza, ezért a hónap és a nap leírásának elegendő az 1, 3 és 5 számjegyeket tartalmaznia. Mivel egy hónapnak sincsen 35 vagy több napja, ezért a 3 és az 5 számjegy közül az egyiknek a hónap leírásában kell szerepelnie. Így március előtt nem lehet megfelelő időpont, márciusban pedig egy jó nap van, a tizenötödike, így 2024.03.15. a következő megfelelő nap, ami 62 nap múlva lesz.

A2. Bogi, Dorka, Andris és Kristóf horgászni mennek. A horgászáshoz magukkal kell vinniük egy vödröt, egy horgászbotot, egy kukacos dobozt és egy hálót. Bogi vödröt, horgászbotot és hálót tud vinni, de kukacos dobozt nem. Dorka csak horgászbotot tud hozni. Andris csak horgászbotot és hálót tud szerezni, Kristóf viszont mind a négyet tudja hozni. Ha azt szeretnék, hogy mindenki pontosan az egyiket vigye, de mindenből legyen pontosan egy, akkor ki vigye a hálót? **Válaszként az adott ember nevének betűszámát adjátok meg.**

Megoldás: Mivel mindenkinek pontosan egy eszközt kell hoznia, ezért Dorka mindenképpen a horgászbotot fogja hozni. Így Andrisnak csak a háló maradhat, amiből következően Bogi hozza a vödröt és Kristóf a kukacos dobozt. Szóval a kérdésre a válasz Andris nevében a betűk száma, ami 6.

A3. Egy kalóz az alábbi térképen X-szel jelölt városban rejtette el a kincsét, mielőtt a helyőrség üldözni kezdte. Legkevesebb hány másik várost kell érintenie azelőtt, mielőtt vissza tud térni a kincséhez, ha csak a térképen jelölt utakon haladhat és az üldözői miatt sosem fordulhat vissza?

Az ábrán a pontok a városokat, a szakaszok az utakat jelölik. Ha a kalóz egy úton elindul, akkor csak a következő városban változtathat irányt.

Megoldás: Öt város érintésével vissza tud érni az X-szel jelölt városba, erre egy példa itt látható:

Ötnél kevesebb város érintésével nem tud visszaérni az X-szel jelölt városba. Vegyük észre, hogy ha felváltva fekete-fehérre színezzük a városokat, akkor fehér városból csak fekete városba, fekete városból pedig csak fehér városba tudunk menni. Emiatt az X-szel jelölt városba csak páratlan másik város érintésével tudunk visszajutni. Egy város érintésével természetesen nem tud visszaérni, mert ahhoz vissza kellene fordulnia. Most azt vizsgáljuk meg, hogy három város érintése miért nem elég. Írjuk oda minden városhoz, hogy milyen távol van az X-szel jelölt várostól:

Ha három város érintésével meg lehetne csinálni, akkor az a következőképp nézne ki: X - egy távolságra levő város - két távolságra levő város - egy távolságra levő város - X. Ilyen viszont nem létezik, mert a kettő távolságra levő városokból csak egy-egy út vezet egy távolságra levő városba, azaz ilyen útvonal létrejöttéhez szintén vissza kellene fordulnia.

A4. Jack, a féllábú kalóz, az ábrán látható ugróiskolán játszik. Úgy szokott végigugrálni, hogy amelyik sorban két mező van, ott csak az egyikre ugrik rá, de minden más mezőt érint. Jack egyszer úgy ugrált végig (csak odafele ment, visszafele nem), hogy az általa kihagyott mezőkön lévő számok szorzata éppen 120 volt. Mennyi az összege azoknak a mezőknek, amikre ekkor ráugrott?

Megoldás: Az nem lehet, hogy a 9-es mezőre nem ugrott rá Jack, mivel a 9 nem osztója a 120-nak, tehát így nem jöhetne ki az szorzatként. Ebből kifolyólag viszont a 10-es számú mezőre nem ugrott rá.

$120 : 10 = 12$, tehát a másik két kimaradt mező szorzatának 12-nek kell lennie.

Mivel a 12 nem osztható 5-tel, emiatt arra biztosan ráugrott Jack, tehát a 6-osra nem.

Mivel $12 : 6 = 2$, emiatt a harmadik kihagyott szám a 2.

Tehát az $1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11$ mezőkre ugrott rá, ezek összege: 48.

A5. Az ábrán látható, csillag alakú jégtábla úszott az óceán felszínén, rajta pingvinekkel. Egyszer csak a jégtábla háromszög alakú darabokra tört úgy, hogy minden darabon pontosan egy pingvin volt. Legkevesebb hány pingvin állhatott a jégtáblán, mielőtt darabokra tört volna?
A csillag szabályos, azaz a csillag oldalai páronként egy-egy egyenesre esnek.

Megoldás:

Az ábrán látható egy példa, ahol a csillagot 4 háromszögre osztottuk fel.

Lássuk be, hogy 3 háromszögre nem törhetett a jégtábla.

A csillagnak öt hegyesszögű csúcsa van, nevezzük ezeket szép csúcsoknak, mindegyiknek valamelyik háromszögnek is csúcsának kell lennie. Látható, hogy a szép csúcsok közül nem lehet kettő szomszédos, amik ugyanannak a háromszögnek a csúcsai. Emaitt nem lehet olyan háromszög, ami három szép csúcsot fed. Emellett az is látható, hogy mivel egy háromszög nem fedhet két szomszédos szép csúcsot, így nem lehet két olyan háromszög, amik fednek kettő-kettő, azaz összesen négy különböző szép csúcsot, mert akkor ezek a háromszögek "metszenék" egymást. Ebből már következik, hogy három háromszög nem elég.

A6. Anett a 17 napos téli szünetet a Balatonnál fogja tölteni. Minden nap szeretne korcsolyázni, de egy adott napon csak akkor tud kimenni, ha az előtte lévő három napból legalább kettőn -5 °C alatt volt a napi átlaghőmérséklet. Legalább hány napon kell, hogy -5 °C alatt legyen a napi átlaghőmérséklet a szünetben ahhoz, hogy Anett minden nap ki tudjon menni korcsolyázni?

Megoldás: Ha a szünet előtti két nap hideg volt, akkor az első nap biztos tud korcsolyázni. Ezek után a szünet első napján legyen -5°C feletti a hőmérséklet, majd a 2. és 3. napon ismét alatta. Ezzel a 2., 3., és 4. napon is biztosan ki fog tudni menni korcsolyázni. Ezt a hármast ismételve, legyen a 4., 7., 10., 13. és 16. napon is -5°C felett a hőmérséklet, és a többin alatta. Ebben az esetben minden nap ki tud menni korcsolyázni, hiszen bármely három egymás követő napból csak 1 meleg.

Vegyük észre, hogy az utolsó napon nem számít, hogy milyen idő van, ezért még akkor is lehet meleg. Így összesen 7 meleg nap van, azaz 10 napon -5°C alatti a hőmérséklet.

Ennél kevesebb hideg nap nem lehet, hiszen ha az első 3 napból nem legalább 2 hideg, akkor a 4. napon nem mehetne ki korcsolyázni. Ugyanígy a 4-6., 7-9., 10-12. és 13-15. napok közül is kell, hogy legyen két hideg. Emiatt legalább 10 nap -5°C alatt van a hőmérséklet.

A7. Egy rab megüzente a társának egy széf kódját, viszont tudta, hogy a börtönőrök minden üzenetet átnéznek, így ezt titkosítva tette meg. Amikor titkosít, a rab kiválaszt egy 0 és 9 közti egész számot, majd az üzenetben minden számjegyet kicserél az ennyivel nagyobb számra úgy, hogy ha a kapott szám kétjegyű lenne, akkor csak az utolsó számjegyét írja le. Például ha a 2-t választja, akkor 891 helyett 013-at ír. A börtönőrök lehallgattak egy telefonhívást a rab és társa között, melyben elhangzott a következő (eredetileg helyes) összeadás: $593 + 98 = 514$. Mi a széf kódja, ha az elfogott üzenetben 2763-at olvastak az őrök, és a rab mindkétszer ugyanazt a titkosítást használta?

Megoldás: Nézzük végig, hogy mi lehet a titkos számjegy az összeadás egyes helyiértéken álló egyenlősége alapján. Könnyű végignézni, hogy csak a 7 megfelelő titkos kódnak, mert ekkor az 593 utolsó jegye 6 lesz, a 98 utolsó jegye 1, míg az 514 utolsó jegye 7. Mivel $1 + 6 = 7$, így ekkor teljesülhet az egyenlőség, ám végignézhető, hogy más eset nem lehetséges. Így csak 7 lehet a titkos kód, ami tényleg megfelelő, amiből azt kapjuk, hogy a keresett kód 5096.

A8. Andris, Balázs és Kristóf három egymást követő napon elmentek horgászni. Az első napon 37, a másodikon 30, a harmadikon 26 halat fogtak összesen. A harmadik nap végén összeszámolták, hogy Andris 40 halat, míg Balázs csak 24-et fogott a három nap alatt. Azt is észrevették, hogy Andris és Balázs, ketten együtt az első két nap pontosan 50 halat fogtak. Hány halat fogott Kristóf a harmadik napon?

Megoldás: A három fiú a három nap alatt összesen $37 + 30 + 26 = 93$ halat fogott. Ebből Kristóf $93 - (40 + 24) = 29$-et fogott. Az első két nap hárman összesen $37 + 30 = 67$ halat fogtak, ebből 50-et Andris és Balázs, így Kristóf az első két nap összesen $67 - 50 = 17$ halat fogott. A harmadik napon tehát Kristóf $29 - 17 = 12$ halat fogott.

A9. Néhány matróz bevisz egy 24×54 méteres, téglalap alakú vitorlát a hajó rakodóterébe. A kapitányuk azt az utasítást adta nekik, hogy hajtsák félbe először jobbról, majd lentről, majd balról, majd fentről és úgy helyezzék el. Ők viszont rosszul emlékeztek az utasításra: ugyan a jó sorrendben hajtották össze, de mindig csak a harmadát hajtották rá a többi részére. Hány négyzetméterrel lett így a négy hajtás után nagyobb a vitorla területe, mint a kapitány elképzelése szerint lett volna?

Megoldás: A vitorla $24\text{m} \cdot 54\text{m} = 1296\text{m}^2$ területű. Az, hogy milyen irányból hajták össze a vitorlát, nem számít, mivel ha a felét hajtják rá, akkor a vitorla területe mindenképp a felére csökken. Hasonlóan, ha a harmadát hajtják rá, akkor a kétharmadára csökken a vitorla területe. Ezért ha az utasítás szerint dolgoztak volna, akkor négyszer feleződött volna a terület, tehát a végén $1296 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 81$ négyzetméteres lett volna a vitorla. Ehelyett a terület $1296 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 256$ négyzetméter lett.

Tehát $256 - 81 = 175$ négyzetméter a különbség.

A10. Két nagy és öt kis polip elindulnak hazafelé a korallzátonyról. Csak az egyikük tudja az utat hazafelé, ezért összekapaszkodnak egy összefüggő alakzattá, hogy ne tévedjenek el. Két polip úgy tud összekapcsolódni, hogy egy-egy csápjukat összefonják. Minden nagy polip minden szabad csápjában 3 igazgyöngyöt, minden kis polip minden szabad csápjában 1 igazgyöngyöt tud vinni. Azokkal a csápokkal amikkel egymást fogják, nem tudnak gyöngyöt fogni. Legfeljebb hány gyöngyöt tudnak hazavinni, ha ők döntik el, hogy hogyan kapaszkodnak össze?

Mindegyik polipnak 8 csápja van.

Megoldás:

Az lesz egy ideális elrendezés, ha a polipok egy sorban helyezkednek el, a két nagy polip a sor két végén van és minden polip a mellette lévő(k) egy-egy csápját fogja.

Ekkor a két nagy polipnak 7-7 csápja marad szabadon, az öt kis polipnak pedig 6-6 csápja.

Így összesen $2 \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 72$ gyöngyöt tudnak hazavinni.

Most megmutatjuk, hogy ennél több nem lehetséges. Kezdetben, amikor senki nincs senkivel összekapaszkodva, a 7 polip 7 különálló „kupacot" alkot. Amikor két polip összekapaszkodik, akkor ők egy egybefüggő kupacba kerülnek, így 1-gyel csökken a kupacok száma. Minden egyes összekapaszkodásnál legfeljebb 1-gyel csökken a kupacok száma. A végén 1 kupacot kell kapnunk, így legalább 6 összekapaszkodásnak kell történnie. Tehát összesen a $7 \cdot 8 = 56$ polipcsápból legalább 12-t összeakaszkodásra használnak, így legfeljebb 44-et tudnak arra használni, hogy gyöngyöket szállítsanak.

Minden polipnak legalább egy csápjával kapaszkodnia kell egy másik polipba, mert csatlakoznia kell az összefüggő polipalakzathoz. Emiatt összesen legfeljebb 14 csápja lehet a nagy polipoknak, amivel gyöngyöt szállítanak. Ezek alapján annál biztosan nem tudnak több gyöngyöt szállítani összesen, ha 44 csápot szállításra használnak, ráadásul abból 14 csáp nagy polipé. Így nem vihetnek $14 \cdot 3 + 30 = 72$ gyöngynél többet.

A11. Zsombor házában minden helyiségnek pontosan három ajtaja van. Hány helyiségből áll Zsombor háza, ha összesen 11 ajtaja van, és ezek közül az egyik a bejárati ajtó?

A házban minden helyiség téglalap alakú.

Megoldás: Számoljuk ki, hogy az ajtók oldalain összesen hány helyiség van. Van 10 ajtó két helyiség határán, és egy ajtó egy helyiséget és Zsombor udvarát választja el. Tehát ha összeadjuk, hogy a helyiségekben összesen hány ajtó van, akkor $2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 21$-t kapunk. Mivel minden szobában három ajtó van, így összesen $21 : 3 = 7$ szoba van.

A12. Csenge rajzolt a négyzetrácsos füzetébe egy 30 egység hosszú, 20 egység széles téglalapot, aminek az oldalai a rácsvonalakra esnek. Hány olyan téglalap van a rajzolt téglalapban, aminek az oldalai 10 és 8 egység hosszúak és az oldalak szintén a rácsvonalakra esnek?

A nagy és a kis téglalap határai eshetnek egybe.

Megoldás: A kis téglalap kétféleképpen állhat. Vagy a 10 hosszú oldala párhuzamos a nagy téglalap 30 hosszú oldalával, vagy a 8 hosszú oldala párhuzamos a 30 hosszú oldallal.

Ha a 8 egység hosszú oldal párhuzamos a 30 egység hosszú oldallal, akkor ebben az irányban a téglalap $30 - 8 + 1 = 23$-féle helyen lehet. A 20 egység hosszú oldallal a 10 egység hosszú oldal lesz párhuzamos, ami ebben az irányban $20 - 10 + 1 = 11$ lehetőséget enged. Így az első esetben összesen $23 \cdot 11 = 253$ helyen lehet a kisebb téglalap.

Ha a 30 egység hosszú oldallal a 10 egység hosszú oldal párhuzamos, akkor ebben az irányban $30 - 10 + 1 = 21$ lehetőség van. A 20 egység hosszú oldallal a 8 egység hosszú oldal párhuzamos, ami $20 - 8 + 1 = 13$ lehetőséget jelent. Ezért ebben az esetben $21 \cdot 13 = 273$ lehetőség van.

Tehát összesen $253 + 273 = 526$ lehetséges elhelyezkedése van a kis téglalapnak.

A13. Lili szeretne eljutni a vitorlásával az $\times$ jellel jelölt mezőre az éjszaka közepén. Ahhoz, hogy ne tévedjen el, megkérte barátját, Sárát, hogy kapcsolja fel néhány világítótorony fényét. A felkapcsolt világítótornyok négy irányba (balra, jobbra, felfelé, lefelé) világítanak a legközelebbi szárazföldet tartalmazó mezőig (lásd ábra). Sára úgy kapcsolt fel három világítótornyot, hogy Lili végig megvilágított úton tudjon eljutni az $\times$-szel jelölt mezőre. Melyik világítótornyokat kapcsolta fel Sára? **Válaszként a három felkapcsolt világítótorony számának szorzatát adjátok meg.**
A hajó mindig csak oldalszomszédos mezőre tud továbbhaladni. A kezdő és végmezőt is meg kell világítaniuk a tornyoknak.

Megoldás:

Az 1-es, 4-es és 8-as számú világítótornyok felkapcsolásával Lili el tud jutni a $\times$ jellel jelölt mezőre a következő módon:

Az 1-es világítótoronytól balra lefelé levő mezőt semmit nem tudja megvilágítani, így a 2-es világítótorony szigetét nem tudjuk felülről megkerülni. Ha a 4-es világítótorony szigetét balról szeretnénk megkerülni, akkor látható, hogy az 5-ös és a 6-os világítótornyot is fel kell kapcsolnunk, viszont innen nem tudjuk még egy világítótoronnyal befejezni. Tehát az egyetlen lehetőség, ha a 2-es és a 4-es világítótornyok szigete között megyünk el. Emiatt a 4-es toronynak biztosan fel kell lennie oltva. Hogy el tudjon indulni, a 3-as és 8-as közül legalább egyet fel kell oltani, és hogy célba tudjon érni, az 1-es és 6-os torony közül is legalább egyet fel kell oltani. Tehát fel van oltva a 4-es, pontosan egy a 3 és 8 közül, és pontosan egy az 1 és 6 közül, és semmi más. Hogy átjussunk a 2-es és a 4-es torony szigete között, ahhoz fel kell lenni oltva a 8-asnak, és ekkor az 1-es és 6-os közül csak az 1-es a megfelelő.

Tehát csak az lehet, hogy az 1-es, 4-es és 8-as van feloltva, így a végső megoldás 32.

A14. A Szélkirálynő kapitánya 13 aranytömböt rejtett el 11 ládában, melyek mindegyikében legfeljebb 2 tömb fér el. A hajón elbújt egy kalóz, aki minden éjszaka leoson a raktárba és ott vagy feltör és beleles egy új ládába, vagy minden korábban feltört ládát kinyit és átnéz. Ha talál aranytömbö(ke)t, akkor pontosan egyet ellop. Legalább hány éjszakára van szüksége a kalóznak, hogy biztosan megszerezzen 7 aranytömböt, ha a kapitány minden reggel újraosztja a megmaradt tömböket a 11 láda között?

Megoldás: A kalóznak fel kell törnie legalább 8 ládát, hiszen ha legalább 4 láda végig zárva maradna, akkor ha a kapitány azokba minden nap 2-2 aranytömböt rejtene, akkor a kalóz legfeljebb $13 - 4 \cdot 2 = 5$ aranytömböt tudna elrabolni. Tehát legalább 8 éjszakát azzal kell töltenie a kalóznak, hogy egy új ládát feltör. Az mindig előfordulhat, hogy ez üres, így ezeken az éjszakákon nem biztos, hogy tud aranytömböt szerezni. Emiatt ezen kívül legalább további 7 éjszakára is szüksége van. Tehát összesen legalább 15 éjszakára szüksége van a kalóznak.

Ez elég is, mert ha az első 8 éjszaka feltör egy-egy új ládát, és utána 7 éjszakán át átnézi az összes feltört ládát, akkor ezeken az éjszakákon mindig találni fog egy aranytömböt, mert a zárva maradt 3 ládában minden éjszaka legfeljebb 6 aranytömb lehet.

A15. Egy hajó el szeretne jutni A-ból B-be az ábrán látható vonalak mentén haladva úgy, hogy egyik pontot sem érinti kétszer. Hányféleképpen tudja megtenni az utat, ha a hajó az áramlat miatt a nyilakkal jelölt utakon csak a nyíl irányába tud menni?

Megoldás: Ha valamikor a felső sorba került a hajó, akkor nem tud úgy eljutni B-be, hogy közben ne haladjon át korábban érintett ponton: ha egyszer belép a felső sorba, akkor onnan csak úgy léphet tovább, hogy az eddigi útvonaltól balra-felfele legyen. Ezért ahhoz, hogy visszakerüljön ennek az ívnek a másik oldalára, valamikor el kell metszenie a későbbi lépések során, ekkor lesz egy ismétlődés.

Ezért a felső sort és az oda vezető útvonalakat figyelmen kívül hagyhatjuk, elég az alábbi ábrán megszámolni az utakat:

Ha az út során valamikor áthalad az e jelű vonalon, vagy a C jelű ponton, akkor látható, hogy a másikon már nem haladhat át. Ezért az a két eset van, hogy a függőleges felezővonalat az e jelű vonalon, vagy a C ponton keresztezi.

Ha az e jelű vonalon haladnak át:

A vonal bal oldali végébe csak 2 módon lehet eljutni, a vonal jobb oldali végéből B-be pedig szintén 2-féleképpen hajózhat. Ezeket bárhogy kombinálhatjuk egymással, ezért így $2 \cdot 2 = 4$ lehetséges $A \to B$ eljutás van.

Ha a C ponton haladnak át:

A-ból C-be az alábbi ábrán kell eljutni:

Itt látható, hogy 4 lehetséges eljutás van. Hasonlóan C-ből B-be is 4 módon juthat el:

Itt is bárhogyan kombinálhatóak az $A \to C$ és a $C \to B$ utak, ezért $4 \cdot 4 = 16$ ilyen út van.

Tehát összesen $4 + 16 = 20$ módon juthat el a hajó A-ból B-be.

A16. Egy zsákban 180 színes golyó van. Minden golyó egyszínű, és a zsákban mindegyik színű golyóból ugyanannyi darab található. Legkevesebb hány golyót kell kihúzni a zsákból, hogy biztosan meg tudjuk állapítani, hogy hányféle színű golyó volt eredetileg a zsákban?

Megoldás: Elsőként azt figyeljük meg, hogy a színek száma mindenképpen osztója a 180-nak, mert minden színből ugyanannyi golyó van.

Gondoljuk meg, hogy mikor lehet két különböző 180 golyóból álló gyűjteményt összekeverni valahány golyó kihúzása után. Ha az egyikben a, a másikban b szín van, ahol $a < b$, akkor az egyikben minden színből $180/a$ golyó van, a másikban minden színből $180/b$ golyó van. Így ha legfeljebb a különböző színű golyót látunk, mindből legfeljebb $180/b$ darabot, akkor nem tudjuk eldönteni, hogy a szín van, vagy b. Tehát lehet $a \cdot 180/b$ golyót húzni úgy, hogy még ne lehessen eldönteni a zsákban lévő golyók színeinek a számát. De ha ennél többet húzunk, akkor vagy lesz a-nál több szín a kihúzott golyók közül, vagy lesz olyan szín, amiből több, mint $180/b$-t kihúzunk, így vagy azt ki tudjuk zárni, hogy a szín van, vagy azt, hogy b szín.

Ezek alapján meg lehet gondolni, hogy a feladat azon múlik, hogy melyek a 180 azon a és b osztói, melyekre $a < b$ és az a/b arány minél nagyobb.

Könnyű végignézni, hogy ez a két osztó a 9 és 10. Az eddig megállapítottak alapján ($a = 9, b = 10$), ha $9 \cdot 180/10 = 162$ golyót húzunk, akkor még nem biztos, hogy meg tudjuk állapítani, hogy 9 vagy 10 szín van. Azonban ha húzunk legalább 163 golyót, akkor már biztosan tudni fogjuk, hogy hány szín van. Ez azért van, mert ha kihúznánk 163 golyót, és még nem tudnánk, hogy a vagy b szín van a pakliban, ahol a és b a 180 osztói és $a < b$, akkor a fenti megfigyelés alapján legfeljebb $a \cdot 180/b = 180 \cdot a/b$ golyót húzhattunk ki. Tehát $a \cdot 180/b = 180 \cdot a/b \geq 163$, amiből következik, hogy $a/b > 9/10$. Ám tudjuk, hogy a $9/10$ volt a legnagyobb arány, így ez nem lehetséges

Tehát a megoldás 163.