XVII. DÜRER VERSENY

F KATEGÓRIA

ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

1. feladat

Mivel a megoldás során figyelembe kell vennünk a golyó térbeli kiterjedését is, így a lejtőt jellemző súrlódási együttható értékétől függően többféle mozgás alakulhat ki:

- A legegyszerűbb eset, ha a lejtőn nincs súrlódás, hiszen ekkor a golyó az eredeti forgási sebességét megtartva jut el a végső magasságig.
- Amennyiben kellően nagy a súrlódási együttható, akkor a golyó a lejtőre érkezve továbbra is tisztán gördülve fog haladni.
- Ha a súrlódási együttható értéke kicsi, akkor az ebből származó nyomaték a golyó forgását kisebb mértékben képes lassítani, így a test a lejtőre érkezve csúszva forog.

Első lépésként írjuk fel a golyó lejtőn való mozgását leíró egyenleteket általánosan. A golyó mozgásegyenlete a lejtő síkjával párhuzamosan:

$$mg\sin\alpha - F_\mathrm{s} = ma_\mathrm{TKP}, \tag{1.1}$$

valamint arra merőlegesen:

$$F_\mathrm{k} = mg\cos\alpha. \tag{1.2}$$

Mivel kiterjedt testről van szó, írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét is:

$$F_\mathrm{s}R = \Theta\beta = \frac{2}{5}mR^2\beta, \tag{1.3}$$

egyszerűsítve

$$F_\mathrm{s} = \frac{2}{5}mR\beta. \tag{1.4}$$

(a)

Ebben az esetben $\mu = 0$, azaz (1.1) egyenlet alapján a test állandó nagyságú gyorsulással fog haladni a megállásig, melynek értéke:

$$a_\mathrm{TKP} = g\sin\alpha, \tag{1.5}$$

így a megállásig megtett út:

$$\Delta s = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}. \tag{1.6}$$

Ez alapján az elért magasság

$$h_\mathrm{a} = \Delta s\sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g}, \tag{1.7}$$

behelyettesítve

$$\boxed{h_\mathrm{a} \approx 46\,\mathrm{cm}}. \tag{1.8}$$

Megjegyzés: Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha alkalmazzuk a folyamatra a mechanikai energiamegmaradás törvényét.

(b)

Mivel a megadott μ értékek közül ez a legnagyobb, vizsgáljuk meg, hogy ki tud-e alakulni a tiszta gördülés. Ennek feltétele, hogy a golyó lejtővel érintkező pontjának sebessége, illetve gyorsulása is zérus, így a tömegközépponti gyorsulás meg kell hogy egyezzen az érintő irányú gyorsulással:

$$a_{\mathrm{TKP}} = a_{\mathrm{t}} = R\beta. \tag{1.9}$$

Ezt felhasználva az (1.1) és (1.4) egyenletekből:

$$F_{\mathrm{s}} = \frac{2}{7} mg \sin\alpha, \tag{1.10}$$

melyből (1.2)-t felhasználva felírhatjuk a tiszta gördülés súrlódási együtthatóra vonatkozó feltételét:

$$F_{\mathrm{s}} = \frac{2}{7} mg \sin\alpha \leq \mu F_{\mathrm{k}} = \mu mg \cos\alpha, \tag{1.11}$$

egyszerűsítve:

$$\frac{2}{7} \operatorname{tg}\alpha \leq \mu. \tag{1.12}$$

Mivel jelen esetben $\mu = 0{,}4 > 2 \operatorname{tg}\alpha/7 \approx 0{,}29$, így a test tisztán gördül a lejtőn is. Ezt felhasználva a kialakuló állandó nagyságú gyorsulás (1.1) és (1.10)-ből:

$$a_{\mathrm{TKP}} = \frac{5}{7} g \sin\alpha, \tag{1.13}$$

melyből a megállás magassága az előző feladatrészben bemutatottakhoz teljesen hasonló módon:

$$h_{\mathrm{b}} = \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{g}. \tag{1.14}$$

A megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{h_{\mathrm{b}} \approx 64\,\mathrm{cm}}. \tag{1.15}$$

(c)

Az előző feladatrész eredményéből már következik, hogy ebben az esetben a golyó a lejtőn csúszva forog, mivel $\mu < 2 \operatorname{tg}\alpha/7 \approx 0{,}29$. Csúszási súrlódás esetén tudjuk, hogy

$$F_{\mathrm{s}} = \mu F_{\mathrm{k}}, \tag{1.16}$$

melybe (1.2)-t beírva, majd (1.1)-be behelyettesítve a kapott gyorsulás:

$$a_{\mathrm{TKP}} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \tag{1.17}$$

Ezt felhasználva az elért magasság:

$$h_{\mathrm{c}} = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha)}. \tag{1.18}$$

Behelyettesítve, a számszerű végeredmény:

$$\boxed{h_{\mathrm{c}} \approx 51\,\mathrm{cm}}. \tag{1.19}$$

2. feladat

Az emberi testben a csontok hossza a terheletlen állapothoz képest megrövidül, mivel a test tömegéből származó súlyerő nyomást gyakorol rájuk, ám amikor az ember a vízben áll, a felhajtóerő miatt ez a nyomás kisebb. A két állapot összehasonlításához határozzuk meg az egyes csontok összenyomódását mindkét esetben, a Hooke-törvény segítségével:

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}, \tag{2.1}$$

ahol F a csontot terhelő súlyerő, A a csont keresztmetszeti területe, E a rugalmassági együttható avagy Young-modulus, L a csont eredeti hossza, ΔL pedig az erő hatására bekövetkező hosszváltozás. Ebből a csontok hosszváltozása kifejezhető:

$$\Delta L = \frac{FL}{AE}. \tag{2.2}$$

A képletbe való helyettesítéskor vegyük figyelembe, hogy a gerinc összenyomódása modellezhető úgy, mintha a teljes testsúly nyomná a súlypont alatti részt, így a képletben L az eredeti hossz harmada, F pedig 750N. A medence esetében is ezzel az erővel kell számolni, a két lábnál viszont ennek csak a felével, hiszen közöttük egyenletesen oszlik el a testsúly. Valamint a csőként modellezett csontok esetében figyeljünk arra, hogy csak a csont keresztmetszeti területét kell venni. Így a (2.2) egyenletbe helyettesítve, a kapott hosszváltozások szárazföldön:

$$\Delta L_\mathrm{g} = 1{,}93 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}, \tag{2.3a}$$
$$\Delta L_\mathrm{m} = 3{,}35 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}, \tag{2.3b}$$
$$\Delta L_\mathrm{l} = 2{,}75 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}, \tag{2.3c}$$

ahol ΔL_g a gerinc rövidülése, ΔL_m a medence rövidülése, és ΔL_l pedig a láb rövidülése.

A vízben álláskor a csontokat terhelő F' erő a testre ható nehézségi és felhajtóerők különbsége lesz, vagyis:

$$F' = F_\mathrm{n} - F_\mathrm{f} = mg\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{e}}\right) = 28{,}85\,\mathrm{N}. \tag{2.4}$$

Itt ϱ_v a víz sűrűsége, ϱ_e az emberi test átlagsűrűsége, m pedig az ember tömege. Ebben az esetben is alkalmazható a korábbi modellünk, figyelve arra, hogy a lábakat csak $F'/2$ erő terheli, míg a másik két csontot F'. Ezek alapján az egyes csontok hosszváltozása a medencében:

$$\Delta L'_\mathrm{g} = 7{,}43 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}, \tag{2.5a}$$
$$\Delta L'_\mathrm{m} = 1{,}29 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}, \tag{2.5b}$$
$$\Delta L'_\mathrm{l} = 1{,}06 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}. \tag{2.5c}$$

Az emberi test teljes hosszváltozását az egyes állapotokban a (2.3), illetve (2.5) egyenletekben kiszámított járulékok összegeként kapjuk:

$$\Delta L = 4{,}71 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}, \tag{2.6a}$$
$$\Delta L' = 1{,}82 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}. \tag{2.6b}$$

A kettő különbsége pedig megadja, mennyivel „nő meg” az ember a vízben:

$$\boxed{\Delta L - \Delta L' = 4{,}53 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}}. \tag{2.7}$$

3. feladat

(a)

Akkor tudunk elkezdeni hintázni, ha a testünkre ható erők eredőjének van vízszintes irányú komponense. Mivel a belső erők összege nulla, a külső erők összegének kell rendelkeznie vízszintes irányú komponenssel. Két külső erő hat: a nehézségi erő és a kötélerő. Előbbi mindig függőleges, utóbbi pedig a kötél irányába mutat, így ha ennek van vízszintes irányú komponense, el tudunk indulni.

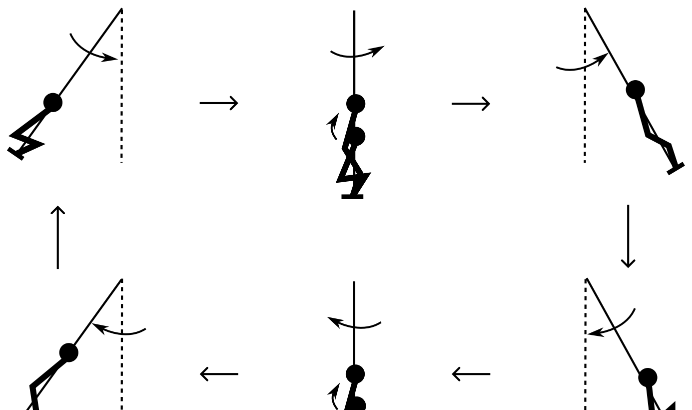
Ezt el tudjuk érni például olyan mozgással, melynek során a hintával érintkező testrészünket eltoljuk egy adott irányba, miközben egy másik testrészünket az azzal ellenkező irányba. Mindeközben tömegközéppontunk vízszintes irányba nem mozdul el. Konkrétabb példa, ha felállunk a hintára, a bal lábunkat az üléssel együtt előrelendítjük, a jobbat pedig hátra. Ekkor a hinta ülése bal lábunkkal együtt mozog, tehát a kötél nem lesz függőleges. Ha pedig már van vízszintes irányú sebességünk, akkor elég visszaülni, és hintázhatunk.

(b)

A feladat során tekintsünk el attól, hogy Peti Sr. kiterjedt test, kezeljük úgy, mint egy tömegpontot. Írjuk fel a perdületét a hinta tengelye körül:

$$N = mL^2\omega = mLv, \tag{3.1}$$

ahol L a tömegközéppontjának és a hinta tengelyének távolsága, ω pedig a hinta szögsebessége. Amikor Peti Sr. feláll, az L távolság megváltozik, ha ezt kellően rövid idő alatt teszi, akkor a gravitáció forgatónyomatéka elhanyagolható, a perdülete állandónak tekinthető.



3.1. ábra. Peti Sr. optimális hintázási stratégiája.

A fentieket képletekkel kifejezve:

$$N = mL_{\text{lent}}v_{\text{lent}} = mL_{\text{fent}}v_{\text{fent}}, \tag{3.2}$$

amelyből a sebességek aránya kifejezhető:

$$v_{\text{fent}} = \frac{L_{\text{lent}}}{L_{\text{fent}}} v_{\text{lent}} \quad v_{\text{lent}} = \frac{L_{\text{fent}}}{L_{\text{lent}}} v_{\text{fent}}. \tag{3.3}$$

Ezek alapján látható, hogy a legnagyobb sebességnövekedés eléréséhez érdemes a hinta a legalsó pontján felállni, ahol v_{lent} maximális. Hasonlóan minimalizálható, azaz zérusra csökkenthető a leguggolás okozta sebességcsökkenés, ha azt a legszélső helyzetben teszi, ahol v_{fent} nulla. Összességében a fenti stratégia eredményezi a kilengés magasságának lehető legnagyobb növekedését, ezt szemlélteti a 3.1. ábra.

A megoldásra az energiamegmaradásból is rájöhetünk: feláláskor a nehézségi és a centrifugális erőknek is ellen kell tartani, leguggoláskor viszont csak a nehézségi erő húz vissza. Így Peti Sr. mozgásával a rendszeren munkát végez, minden lengésnél nő az összenergia, és egyre magasabbra jut.

(c)

Feláláskor Peti Sr. mozgási energiája megnő, a (3.2) egyenlet alapján felírható, hogy minden feláláskor:

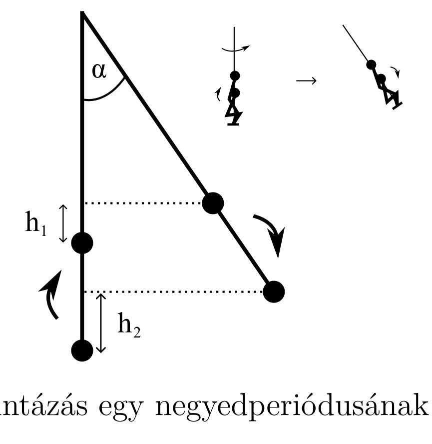
$$\frac{mv_1^2/2}{mv_0^2/2} = \frac{L_{\text{lent}}^2}{L_{\text{fent}}^2}, \tag{3.4}$$

tehát a mozgási energia $(L_{\text{lent}}/L_{\text{fent}})^2$-szeresére nő, ezután pedig átalakul helyzeti energiává:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1, \qquad \text{ahol} \qquad h_1 = L_{\text{fent}}(1-\cos\alpha). \tag{3.5}$$

Ebben a szélső helyzetben a sebessége zérus. Ezután leül, de leülés után az érintő irányú sebessége nulla marad a (3.3) képlet szerint. A következő fázisban a helyzeti energiája visszaalakul mozgási energiává. Geometriai megfontolások alapján $h_2 = L_{\text{lent}}(1-\cos\alpha)$, így a félperiódus végén a mozgási energia:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2 = mgh_1\frac{L_{\text{lent}}}{L_{\text{fent}}} = \frac{1}{2}mv_1^2\frac{L_{\text{lent}}}{L_{\text{fent}}} = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{L_{\text{lent}}}{L_{\text{fent}}}\right)^3. \tag{3.6}$$



3.2. ábra. A hintázás egy negyedperiódusának szemléltetése.

Ezek alapján egy félperiódus alatt a mozgási energia $(L_{\text{lent}}/L_{\text{fent}})^3$-szeresére nő. A feladat feltevéseit követve $L_{\text{lent}} = 3\,\text{m}$ és $L_{\text{fent}} = 2\,\text{m}$, amely alapján $(L_{\text{lent}}/L_{\text{fent}})^3 = 27/8$. Ha n lengés, azaz n félperiódus történik, akkor a végső és kezdeti energiák aránya:

$$\frac{E_{\text{vég}}}{E_{\text{kezd}}} = \left(\frac{27}{8}\right)^n. \tag{3.7}$$

Kezdetben a hinta kitérésének legnagyobb magassága $h = L(1 - \cos 10°)$, az elérni kívánt magasság pedig $H = L(1 - \cos 90°) = L$. Így a végső és kezdeti helyzeti energiák aránya kifejezhető, mint:

$$\frac{E_{\text{vég}}}{E_{\text{kezd}}} = \frac{H}{h} = \frac{1}{1 - \cos 10°}. \tag{3.8}$$

A (3.7) és (3.8) egyenleteket összevetve a lengések n számára az alábbi megkötést kapjuk:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^n \geq \frac{1}{1 - \cos 10°}. \tag{3.9}$$

Ez kielégíthető, ha $n \geq 4$, azaz a kívánt magasság eléréséhez négy félperiódus szükséges.

(d)

Hintázás közben Peti Jr. előre-hátra dülöngél. Amikor előredől, a hinta kicsit hátramozdul, amikor hátradől, akkor pedig előremozdul. Ezt magyarázhatjuk a perdületmegmaradással: pillanatszerű mozgásnál a nehézségi erő forgatónyomatéka elhanyagolható, így a perdület állandó. Legyen Peti Jr. tömegközéppontjának szögsebessége a hinta tengelye körül ω, testének szögsebessége saját tömegközéppontja körül pedig Ω. Ezek alapján:

$$mL^2\omega + ma^2\Omega = \text{állandó}, \tag{3.10}$$

ahol a a felsőtest, illetve lábak hossza, amely a súlyzómodellben azonos.

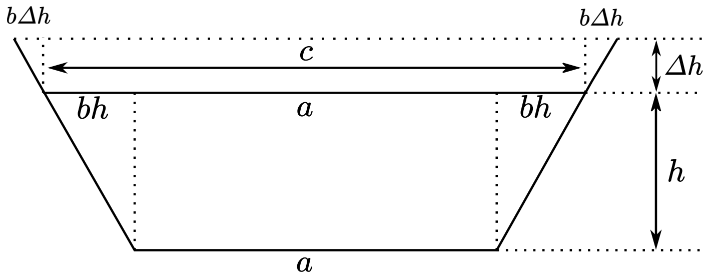
Előredőlés közben Ω kissé megnő, majd visszaáll eredeti értékére, így Peti Jr. szögelfordulása saját tömegközéppontja körül megváltozik. Viszont a (3.10) egyenlet miatt eközben ω kissé lecsökken, majd visszaáll eredeti értékére, amelynek következtében Peti Jr. tömegközéppontja a hinta tengelye körül elfordul. Így, ha akkor dől előre, amikor a hinta a legelső pontjában éppen áll, akkor egy kicsit magasabbra emelkedik. Ugyanez történik, ha hátradől, amikor a hinta a leghátsó pontjában van. Ezzel a módszerrel Peti Jr. egyre feljebb hajthatja magát.

4. feladat

A hasábbal közelített Atlanti-óceán térfogata arányos a keresztmetszet területével, amely egy trapéz, tehát:

$$V = K \cdot A_{\text{trapéz}} = \frac{K}{2}(a + c)h. \tag{4.1}$$

Ha a hőtágulás hatására megnő a trapéz magassága, akkor – mivel a rövidebbik alap fix – a hosszabbik alap is megváltozik.



4.1. ábra. Az vízszintemelkedés releváns paraméterei.

A 4.1. ábra alapján a c és a oldalak hosszának különbsége h-val aranyos: $c-a=2bh$, így Δh magasságváltozás hatására a c oldal megváltozása $\Delta c = [a+2b(h+\Delta h)] - [a+2bh] = 2b\Delta h$. Ez alapján a térfogatváltozás az alábbi módon fejezhető ki:

$$\Delta V = \frac{K}{2}\left[(a+c+2b\Delta h)(h+\Delta h) - (a+c)h\right] \approx \frac{K}{2}(a+c+2bh)\Delta h = Kc\Delta h. \tag{4.2}$$

A térfogatváltozás mértéke a β hőtágulási együttható és a (4.1) egyenlet alapján

$$\Delta V = \beta V \Delta T = \frac{\beta K}{2}(a+c)h\Delta T, \tag{4.3}$$

amelyet a (4.2) alakkal egyenlővé téve:

$$Kc\Delta h = \frac{\beta K}{2}(a+c)h\Delta T \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta h = \frac{\beta h}{2}\left(\frac{a}{c}+1\right)\Delta T \approx 520\,\mathrm{mm}}. \tag{4.4}$$

Megjegyzések

Érdekességként megemlítendőek az alábbi apró kiegészítések – ezek ismerete a megoldás során természetesen nem elvárás, céljuk csupán az olvasó tudásának bővítése:

- A globális tengerszint-emelkedés mértéke az elmúlt száz év során nagyjából 180 mm volt.
- Az óceánok felszíni hőmérséklete csak a felső néhány száz méteren marad meg, ez alatt az úgynevezett *termoklin* réteg található, ahol a hőmérséklet exponenciálisan csökken, és nagyjából 1000 m-es mélység alatt a víz hőmérséklete már stabilan 4 °C körüli. Ha a (4.4) végképletbe $h = 1000$ m-t helyettesítünk, akkor az eredmény $\Delta h \approx 130$ mm lesz, amely egy sokkal reálisabb közelítés.
- Elsőre nagyon durva közelítésnek tűnhet az Atlanti-óceán ennyire egyszerű geometriai testként való leírása, de belátható, hogy az eredményt nem befolyásolja nagyban a meder alakja. A (4.4) egyenletben kapott képlet tetszőleges meder esetén kifejezhető $\Delta h = \beta h\Delta T/d$ alakban, ahol d egy 1 és 3 közötti valós szám. d értéke attól függ, hogy a meder alakjának kiterjedését hány dimenzió mentén befolyásolja a magasság. Téglatest esetén $d=1$, háromszög alapú hasáb esetén $d=2$, szabályos síkidom alapú gúla esetén pedig $d=3$ lett volna, tehát legrosszabb esetben is csupán egy háromszoros szorzóval tévedhetünk.

- A Föld klímája egy kaotikus rendszer, amelynek modellezéséhez bonyolult klímamodelleket használnak. A fenti számolások csupán nagyságrendi becslésnek tekinthetők a kiszámolt mennyiségek értékére, de látható, a kapott értékek egészen jól megközelítik a valóságban is mért értékeket.

5. feladat

Elsőként vegyük észre, hogy amikor kicserélünk egy szakaszt egy kétszer akkora keresztmetszeti területűre, akkor egyedül annak a szakasznak fog megváltozni az ellenállása, mégpedig úgy, hogy a felére csökken. Ezután nézzük meg, hogyan változik az eredő ellenállás az első pár fázisban! A középső szakasz eredetileg $1\,\Omega$ volt, ezt cseréltük ki $1/2\,\Omega$-ra. Így az első fázisban a drót ellenállása $5/2\,\Omega$, azaz $s_1 = 1/2\,\Omega$ értékkel csökkent. Ezután két darab $1/3\,\Omega$-os szakaszt cseréltünk ki egy-egy $1/6\,\Omega$-osra, így az eredő ellenállás $s_2 = 1/3\,\Omega$ értékkel csökkent.

Minden egyes fázisban az addig érintetlenül hagyott szakaszok száma megduplázódik, hiszen minden érintetlen szakaszból csináltunk egy módosítottat és kettő érintetlent. Továbbá a kicserélt szakaszok ellenállása egy adott fázison belül megegyezik, és ez az érték pont az előző fázisban kicserélt ellenállások nagyságának a harmada. Írjuk fel s_n-t a következő alakban:

$$s_n = \frac{a_n r_n}{2}, \tag{5.1}$$

ahol a_n a kicserélt szakaszok száma, r_n pedig ezeknek az ellenállása. Az előbb elmondottakból adódik, hogy

$$a_n = 2a_{n-1}, \tag{5.2a}$$

$$r_n = \frac{r_{n-1}}{3}. \tag{5.2b}$$

Így felírható, hogy

$$s_n = \frac{(2a_{n-1})(r_{n-1}/3)}{2} = \frac{2}{3}s_{n-1}. \tag{5.3}$$

Tehát s_1, $s_2, \ldots$ mértani sorozatot alkotnak, melynek kvóciense $q = 2/3$. Mivel s_i mindig az eredő ellenállás csökkenését adja meg, így a mágikus vezeték ellenállása:

$$R = 3\,\Omega - s_1 - s_2 - \ldots = 3\,\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} s_i = 3\,\Omega - \frac{1/2}{1-2/3}\,\Omega. \tag{5.4}$$

Egyszerűsítve az alábbi végeredményt kapjuk:

$$\boxed{R = 1{,}5\,\Omega}. \tag{5.5}$$

Ez megerősíti azt az intuíciót, miszerint elég sok fázis után már csak nagyon kicsi rész marad érintetlenül, így a teljes ellenállás is a felére csökken. Az viszont nem igaz, hogy semmi sem marad érintetlenül az eljárás végére, hiszen minden fázisban az érintetlen szakaszok száma megduplázódik.