



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER
VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

1. feladat

Először tekintsük át a hajó mozgását kvalitatív megközelítésben. A hosszú idő után beálló stacionárius állapotban a hajó minden ágyúgolyó kilövése után egy maximális V_{\max} sebességgel rendelkezik. Ezt követően T ideig lassuló mozgást végez a közegellenállás hatása alatt, elérve minimális V_{\min} sebességét. Ezt egy újabb ágyúlövés követi, mely ismét V_{\max} értékre növeli a sebességet, majd az lecsökken V_{\min} értékre, és így tovább.

Az ágyúlövések során felírható az impulzusmegmaradás törvénye, azaz a hajó lendületváltozását az ágyúgolyó lendületváltozásának kell fedeznie:

$$M(V_{\max} - V_{\min}) = mv. \quad (1.1)$$

Itt M a hajó kilövés utáni *aktuális* tömege, amely a teljes mozgás során változhat. Később, a lövések közti periódusban a hajóra sebességével egyenesen arányos fékezőerő hat. Ezt a mozgásegyenlet alakjában kifejezve:

$$M\dot{V} = -kV, \quad (1.2)$$

ahol V a test időfüggő pillanatnyi sebessége. A mozgásegyenletet az idő szerint integrálva a teljes T perióduson az alábbi eredmény adódik:

$$M(V_{\min} - V_{\max}) = -kX, \quad (1.3)$$

ahol X a teljes periódus alatt megtett út.

Észrevehetjük, hogy az (1.1) és (1.3) egyenletek bal oldalai egymás ellentettjei, így ennek a jobb oldalakra is teljesülnie kell. Ebből az X út kifejezhető:

$$X = \frac{mv}{k}. \quad (1.4)$$

Ezt a T periódusidővel elosztva éppen a keresett átlagsebességet kapjuk:

$$\boxed{V_{\text{átlag}} = \frac{mv}{kT}}, \quad (1.5)$$

amely meglepő módon független a hajó M tömegétől. Ez az intuíciónkkal ellentétes eredmény azonban megmagyarázható, ha összehasonlítjuk a legelső (1.1) egyenlettel. Az egyetlen ágyúlövés által nyert sebesség természetesen fordítottan arányos a hajó tömegével, így az, hogy hány periódus alatt érhető el az (1.5) átlagsebesség, az M paraméterrel durván egyenes arányosságot mutat. Nagy tömegű hajó esetén tehát rendkívül hosszú, tipikusan irreálisan hosszú időre lenne szükség $V_{\text{átlag}}$ eléréséhez.

Megjegyzés

A fentiek mellett megemlítendő, hogy $V_{\text{átlag}}$ fordítottan arányos a k közegellenállási tényezővel, amely függ a hajó alakjától és kiterjedésétől. Mivel realiztikus esetekben egy hajó tömege és kiterjedése egymás monoton függvényei, az átlagsebesség ilyen közvetett módon mégiscsak függhet a tömegtől, de ennek felismerését a versenyzőktől nem vártuk el.



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER
VERSENY

F+
KATEGÓRIA

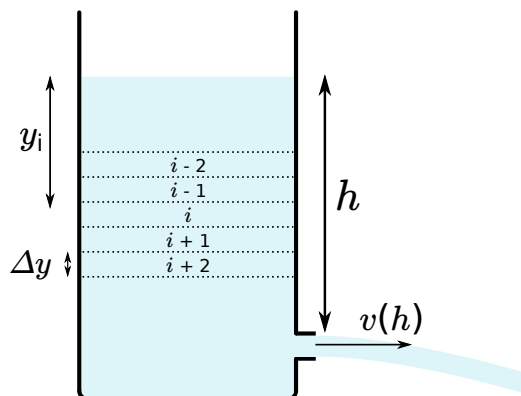
DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

2. feladat

(a) - első megoldás

Tekintsük az A keresztmetszetű kifúrt oldalú edényt, amelyben a düradék a lyuk felett h magasságban áll, és $v(h)$ sebességgel folyik ki! A düradék szintje alatt a hidrosztatikai nyomás növekszik a feljebb lévő rétegek hatására, így az összenyomhatóság miatt a düradék sűrűsége is változik. Jelöljük a felszín alatti y magasságban lévő réteg sűrűségét $\rho(y)$ -nal, hidrosztatikai nyomását pedig $P(y)$ -nal! A 2.1. ábrán látható módon felbontva az edényben lévő düradéket olyan kicsiny Δy vastagságú rétegekre ahol a sűrűség nagyjából konstansnak tekinthető, a h mélységben lévő hidrosztatikai nyomás kifejezhető úgy, mint a felette lévő egyes rétegek súlyából eredő nyomások összege:

$$P(h) = \frac{1}{A} \sum_i \rho(y_i) A \Delta y \cdot g = g \sum_i \rho(y_i) \Delta y. \quad (2.1)$$



2.1. ábra. A düradékkal végzett Torricelli-kísérlet szemléltetése.

A folyamatos kifolyás miatt rövid idő után a felszín magassága kicsiny Δh -val csökken, az edény aljáról pedig egy ugyanilyen vastagságú folyadék réteg eltűnik. A kifolyt réteg sebességéhez szükséges mozgási energia

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \rho(h) A \Delta h \cdot v(h)^2, \quad (2.2)$$

amelyet a többi réteg magasságcsökkenéséből felszabaduló helyzeti energia fedez. Mivel minden réteg ugyanúgy Δh magassággal került lejjebb, ezért ennek mértéke:

$$\Delta E_h = \Delta h \sum_i \rho(y_i) A \Delta y \cdot g = A \Delta h \cdot g \sum_i \rho(y_i) \Delta y = A \Delta h \cdot P(h). \quad (2.3)$$

Mivel $\Delta E_h = \Delta E_m$, ezért a kifolyás sebességére az alábbi összefüggés kapható:

$$v(h) = \sqrt{\frac{2P(h)}{\rho(h)}}. \quad (2.4)$$



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

Ellenőrzésként láthatjuk, hogy az összenyomhatatlan víz esetén, ahol $\varrho(h) = \varrho_0$ és $P(h) = \varrho_0 g h$, visszakapjuk az ismert $v(h) = \sqrt{2gh}$ képletet. Mivel kis mélységek esetén a düradék is így viselkedik, erre is érvényesek lesznek ezek az összefüggések, amíg a hidrosztatikai nyomása kisebb, mint $P_0 = P(h_0) = \varrho_0 g h_0 = 5 \cdot 10^4$ Pa.

Nagyobb nyomás esetén azt kell felhasználnunk, hogy a kifolyási sebesség állandó, ezért a (2.4) egyenlet alapján

$$\frac{P(h)}{\varrho(h)} = g h_0. \quad (2.5)$$

Átszorozva $\varrho(h)/g h_0$ -al, és beírva a nyomásra kapott a (2.1) összefüggést, azt kapjuk, hogy $\varrho(h) = 1/h_0 \cdot \sum_i \varrho(y_i) \Delta y$. Ebbe $h = y_{n+1}$ -t helyettesítve:

$$\varrho(y_{n+1}) = \frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^n \varrho(y_i) \Delta y = \frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^{n-1} \varrho(y_i) \Delta y + \frac{\varrho(y_n) \Delta y}{h_0} = \varrho(y_n) \cdot (1 + \Delta y/h_0), \quad (2.6)$$

tehát az egyes düradékrétegek sűrűsége a h_0 mélység alatt egy $q = 1 + \Delta y/h_0$ kvóciensű mértani sorozat tagjaiként foghatók fel. Mivel egy tetszőleges $h \geq h_0$ mélységű rétegre tekinthetünk úgy, mint a sorozat $n = (h - h_0)/\Delta y + 1$ -ik tagja, ezért ennek nyomása

$$\varrho(h) = \varrho(h_0) \cdot (1 + \Delta y/h_0)^{(h-h_0)/\Delta y} = \varrho_0 \cdot \left[(1 + \Delta y/h_0)^{h_0/\Delta y} \right]^{h/h_0 - 1}. \quad (2.7)$$

Elég kicsi $\Delta y/h_0$ hányadost tekintve a külső zárójelben lévő kifejezés $(1 + 1/n)^n$ alakot ölt, amiről tudjuk, hogy nagy n -ek esetén az e -számhoz tart, tehát a düradék nyomása h_0 -nál mélyebb rétegekben

$$\varrho(h) = \varrho_0 \cdot e^{(h-h_0)/h_0}. \quad (2.8)$$

Megint felhasználva a (2.1) összefüggést, a nyomás kifejezésére a mértani sorozatok összegképletét kell használjuk:

$$\begin{aligned} P(h) &= P(h_0) + g \Delta y \sum_{i=1}^{n-1} \varrho(y_i) = P_0 + g \Delta y \cdot \varrho(h_0) \frac{(1 + \Delta y/h_0)^{n-1} - 1}{1 + \Delta y/h_0 - 1} \\ &= P_0 + g h_0 \varrho_0 \left[(1 + \Delta y/h_0)^{(h-h_0)/\Delta y} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Felhasználva, hogy a szögletes zárójel első tagja az előzőekhez hasonlóan $e^{(h-h_0)/h_0}$ -hoz tart, illetve hogy $P_0 = \varrho_0 g h_0$, a nyomás mélységfüggvénye h_0 -nál nagyobb h -k esetén:

$$P(h) = P_0 \cdot e^{(h-h_0)/h_0}. \quad (2.10)$$

A (2.8) és a (2.10) egyenleteket elosztva egymással a magasságfüggés kiküszöbölhető: $\varrho(h)/P(h) = \varrho_0/P_0$. Ezek alapján a sűrűség a hidrosztatikai nyomás függvényében:

$$\varrho(P) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{ha } P \leq P_0, \\ \varrho_0 P/P_0 & \text{ha } P > P_0. \end{cases} \quad (2.11)$$



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER
VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

(a) - második megoldás

A (2.1) egyenletben lévő összegzés a $\Delta y \rightarrow 0$ határértékben a következő integrállá alakul:

$$P(h) = g \int_0^h \varrho(y) dy, \quad (2.12)$$

amelyet h -szerint deriválva:

$$P'(h) = g\varrho(h). \quad (2.13)$$

Az első módszernél látott logikát tovább követve a kifolyási sebesség:

$$v(h) = \sqrt{\frac{2P(h)}{\varrho(h)}} = \sqrt{2g \frac{P(h)}{P'(h)}} = \sqrt{\frac{2g}{(\ln P(h))'}}. \quad (2.14)$$

A $h \leq h_0$ esetben $v(h) = \sqrt{2gh}$, amelyből

$$(\ln P(h))' = \frac{1}{h} \implies \ln P(h) = \ln h + C_1 \implies P(h) = e^{C_1} \cdot h \quad (2.15)$$

valamilyen C_1 konstanssal. A $h > h_0$ esetben $v(h) = \sqrt{2gh_0}$, amelyből

$$(\ln P(h))' = \frac{1}{h_0} \implies \ln P(h) = \frac{h}{h_0} + C_2 \implies P(h) = e^{C_2} \cdot e^{h/h_0} \quad (2.16)$$

valamilyen C_2 konstanssal. Ebből a sűrűség mélységfüggvénye:

$$\varrho(h) = \frac{1}{g} P'(h) = \begin{cases} e^{C_1} & \text{ha } h \leq h_0, \\ e^{C_2} \cdot e^{h/h_0}/h_0 & \text{ha } h > h_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

A C_1 és C_2 állandók a $\varrho(0) = \varrho_0$ határfeltételből és $\varrho(h)$ függvény h_0 pontban való folytonosságából kaphatóak, ezek alapján $C_1 = \ln \varrho_0$ és $C_2 = \ln(h_0 \varrho_0) - 1$. Mivel $\varrho(h)$ függvény az első szakaszon konstans, a második szakaszon pedig ugyanolyan függvényalakot követ, mint a (2.16) egyenletből megkapott $P(h)$, ezért a h -függés kiküszöbölhető, és az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\varrho(P) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{ha } P \leq P_0, \\ \varrho_0 P/P_0 & \text{ha } P > P_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

(b)

Mivel a hidrosztatikai nyomás a felette lévő düradék súlyából származó nyomás, ezért az óceánfenékhez tartozó H mélységben értéke:

$$P(H) = \frac{M_d g}{4\pi R^2 x}. \quad (2.19)$$

A (2.10) egyenlet alapján az ekkora nyomáshoz tartozó mélység:

$$H = h_0 \cdot \left[1 + \ln \left(\frac{P(H)}{P_0} \right) \right] = h_0 \cdot \left[1 + \ln \left(\frac{M_d g}{4\pi R^2 x P_0} \right) \right]. \quad (2.20)$$

A megadott adatokat behelyettesítve adódik a végeredmény:

$$\boxed{H = 38 \text{ m}}. \quad (2.21)$$



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER
VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

3. feladat

(a)

A Földre érkező energia elsődleges forrása a Naptól érkező $J_{\text{Nap}} = 168 \text{ W/m}^2$ felületi áram-sűrűség, amely állandó. A földfelszínről hősugárzás formájában távozik $J_{\text{sug}} = \sigma T^4$ energiaáram, ám ebből $J_{\text{ÜH}}$ az üvegházhatás következtében visszajut a felszínre. Ez alapján az egyensúly fel-tétele:

$$J_{\text{Nap}} - J_{\text{sug}} + J_{\text{ÜH}} = 0. \quad (3.1)$$

Mivel a Naptól érkező sugárzás mértéke állandó, ezért ha az üvegházhatásból érkező energia-áram mértéke megnő, ugyanannyival kell nőnie a hősugárzás formájában kibocsátott energia-áramnak is:

$$\Delta J_{\text{ÜH}} = \Delta J_{\text{sug}} = \sigma((T + \Delta T)^4 - T^4) \approx 4\sigma T^3 \Delta T. \quad (3.2)$$

Mivel az üvegházhatásból érkező teljesítményváltozás fele tudható be a szén-dioxid koncent-ráció megváltozásának, ezért

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{ÜH}} &= 2 \cdot \Delta J_{\text{CO}_2} = 2 \cdot 6,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot [\ln(c_2/c_0) - \ln(c_1/c_0)] \\ &= 13,2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \ln(c_2/c_1) = 5,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Az ehhez szükséges hőmérsékletváltozás a (3.2) és (3.3) egyenletek alapján:

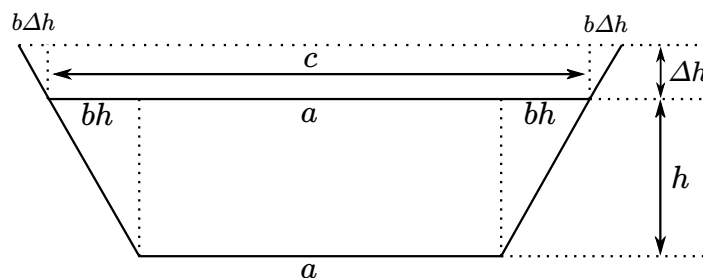
$$\Delta T = \frac{\Delta J_{\text{ÜH}}}{4\sigma T^3} \approx 1 \text{ K}. \quad (3.4)$$

(b)

A hasábbal közelített Atlanti-óceán térfogata arányos a keresztmetszet területével, amely egy trapéz, tehát:

$$V = K \cdot A_{\text{trapéz}} = \frac{K}{2}(a + c)h. \quad (3.5)$$

Ha a hőtágulás hatására megnő a trapéz magassága, akkor – mivel a rövidebbik alap fix – a hosszabbik alap is megváltozik.



3.1. ábra. Az vízszintemelkedés releváns paramétereit.



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

A 3.1. ábra alapján a c és a oldalak hosszának különbsége h -val arányos: $c - a = 2bh$, így Δh magasságváltozás hatására a c oldal megváltozása $\Delta c = [a + 2b(h + \Delta h)] - [a + 2bh] = 2b\Delta h$. Ez alapján a térfogatváltozás az alábbi módon fejezhető ki:

$$\Delta V = \frac{K}{2} [(a + c + 2b\Delta h)(h + \Delta h) - (a + c)h] \approx \frac{K}{2}(a + c + 2bh)\Delta h = Kc\Delta h. \quad (3.6)$$

A térfogatváltozás mértéke a β hőtágulási együttható és a (3.5) egyenlet alapján

$$\Delta V = \beta V \Delta T = \frac{\beta K}{2}(a + c)h\Delta T, \quad (3.7)$$

amelyet a (3.6) alakkal egyenlővé téve:

$$Kc\Delta h = \frac{\beta K}{2}(a + c)h\Delta T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta h = \frac{\beta h}{2} \left(\frac{a}{c} + 1 \right) \Delta T \approx 520 \text{ mm}}. \quad (3.8)$$

Megjegyzések

Érdekességgként megemlítenédők az alábbi apró kiegészítések – ezek ismerete a megoldás során természetesen nem elvárás, céljuk csupán az olvasó tudásának bővítése:

- A globális felmelegedés mértéke az elmúlt 100 év során körülbelül $(1 - 1,5)^\circ\text{C}$ volt.
- A globális tengerszint-emelkedés mértéke az elmúlt száz év során nagyjából 180 mm volt.
- Az óceánok felszíni hőmérséklete csak a felső néhány száz méteren marad meg, ez alatt az úgynevezett *termoklin* réteg található, ahol a hőmérséklet exponenciálisan csökken, és nagyjából 1000 m-es mélység alatt a víz hőmérséklete már stabilan 4°C körüli. Ha a (3.8) végképletbe $h = 1000$ m-t helyettesítünk, akkor az eredmény $\Delta h \approx 130$ mm lesz, amely egy sokkal realisabb közelítés.
- Elsőre nagyon durva közelítésnek tűnhet az Atlanti-óceán ennyire egyszerű geometriai testként való leírása, de belátható, hogy az eredményt nem befolyásolja nagyban a meder alakja. A (3.8) egyenletben kapott képlet tetszőleges meder esetén kifejezhető $\Delta h = \beta h \Delta T / d$ alakban, ahol d egy 1 és 3 közötti valós szám. d értéke attól függ, hogy a meder alakjának kiterjedését hány dimenzió mentén befolyásolja a magasság. Téglatest esetén $d = 1$, háromszög alapú hasáb esetén $d = 2$, szabályos síkidom alapú gúla esetén pedig $d = 3$ lett volna, tehát legrosszabb esetben is csupán egy háromszoros szorzóval tévedhetünk.
- A Föld klímája egy kaotikus rendszer, amelynek modellezéséhez bonyolult klímamodelleket használnak. A fenti számolások csupán nagyságrendi becslésnek tekinthetők a kiszámolt mennyiségek értékére, de látható, a kapott értékek egészen jól megközelítik a valóságban is mért értékeket.



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER
VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

4. feladat

A megoldáshoz szükséges fő fizikai gondolat, hogy a fénynyaláb egy része a folyadékoszlop felszínén megtörik, a maradék visszaverődik. Az megtört hányadot jellemző áteresztési (transzmissziós) tényező értéke az útmutatásban megadott formula szerint

$$T = \frac{4n}{(n+1)^2}. \quad (4.1)$$

Hasonlóan bevezethető a visszaverődési (reflexiós) tényező is, mint

$$R = 1 - T = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}. \quad (4.2)$$

Tekintsük először a visszaverődés esetét. Ekkor a fénynyaláb egyetlen fotonjának impulzusváltozása az alábbi erőlkést eredményezi:

$$F_{\text{refl}} \Delta t = \frac{2h}{\lambda}, \quad (4.3)$$

ahol λ a hullámhossz, h pedig a Planck-állandó. Ez pozitív, azaz a visszavert fotonok tolóerőt fejtenek ki a folyadékfelszínre. Az egységnyi felületre időegységenként beérkező fotonszám a megadott energiaáramsűrűségből számítható:

$$j_{\text{refl}} = \frac{RS}{hf}, \quad (4.4)$$

ahol f a frekvencia, amely a hullámhosszal az $f = c/\lambda$ relációban áll. A folyadékfelszínre kifejtett fénynyomás (4.3) és (4.4) alapján könnyedén számítható:

$$p_{\text{refl}} = j_{\text{refl}} F_{\text{refl}} \Delta t = \frac{2RS}{c}. \quad (4.5)$$

Vizsgáljuk meg ezt követően a törés esetét is. Ekkor az egy fotonra eső impulzusváltozás a következőképp változik:

$$F_{\text{transz}} \Delta t = \frac{(1-n)h}{\lambda}. \quad (4.6)$$

Ez negatív, azaz a megtört fotonok húzóerőt fejtenek ki a folyadékfelszínre. Eközben a felületre érkező részecskeáram pedig az előzőekkel analóg módon:

$$j_{\text{transz}} = \frac{TS}{hf}, \quad (4.7)$$

A folyadékfelszínre kifejtett fénynyomás (4.6) és (4.7) alapján:

$$p_{\text{transz}} = j_{\text{transz}} F_{\text{transz}} \Delta t = \frac{(1-n)TS}{c}. \quad (4.8)$$



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER
VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

A teljes fénynyomás az (4.5) és (4.8) járulékok összegeként adódik. A reflexiós és transzmissziós tényezőkre vonatkozó (4.1) és (4.2) egyenleteket is felhasználva, némi egyszerűsítést követően:

$$p = p_{\text{refl}} + p_{\text{transz}} = \frac{1 - n}{1 + n} \frac{2S}{c}, \quad (4.9)$$

amely negatív, azaz húzóerőnek felel meg. Az új egyensúlyi helyzetben ezt a h magasságban megemelkedett folyadékszint ρgh hidrosztatikai nyomása egyenlíti ki. Ez alapján:

$$h = \frac{n - 1}{n + 1} \frac{2S}{c\rho g}. \quad (4.10)$$

5. feladat

(a)

Tekintsük először a tömör alumíniumhenger esetét. Ekkor ismert, hogy szupravezető állapotban a Meissner–Ochsenfeld-effektus következtében a test teljesen kizárja magából a mágneses mezőt, azaz belül az indukcióvektor zérus. A mágneses Gauss-törvényt egy, a felületre rásimuló, kicsiny hasábra alkalmazva belátható, hogy a határfelületen a mágneses indukcióvektor normális komponense eltűnik. Ez a tömör szupravezetőt jellemző határfeltétel hasonló ahhoz, hogy elektrosztatikában vezető anyagok felületén a télerősség normális irányú. Éppen ezért felmerül az ötlet, hogy a tükörráradások módszeréhez hasonlóan ezt a peremfeltételt egy – a szupravezető belsejében elhelyezett – *tüköráram* segítségével próbáljuk kielégíteni.

Válasszuk meg koordinátarendszerünket oly módon, hogy az \mathbf{e}_z egységvektor által kijelölt z tengely éppen a henger szimmetriatengelyére essen. Az origóból az áramjárta vezetékre bocsátott merőleges vektort jelölje $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_x$, a hengerháj egy pontjába mutató helyvektor pedig legyen \mathbf{r} . Ekkor a mágneses indukcióvektor az Ampère-féle gerjesztési törvény alapján a jól ismert alakot ölti:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{d})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^2}. \quad (5.1)$$

Tüköráramként helyezzünk el egy I_0 árammal átjárt hosszú, egyenes vezeték a szimmetriatengelytől mért $\mathbf{d}_0 = d_0\mathbf{e}_x$ vektorral jelölt távolságra. Ennek mágneses indukciójáruléka az előzőhöz hasonlóan:

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{d}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}_0|^2}. \quad (5.2)$$

A határfeltétel megköveteli, hogy a teljes mágneses indukcióvektor normális komponense eltűnjön, azaz:

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_0(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (5.3)$$

A skaláris szorzat (5.1) és (5.2) felhasználásával kifejthető:

$$-\frac{\mu_0 I d}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^2} - \frac{\mu_0 I_0 d_0}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}_0|^2} = 0, \quad (5.4)$$



ELMÉLETI MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

ahol felhasználtuk, hogy az \mathbf{r} és $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ vektorok egymásra merőlegesek, továbbá az $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$ azonosságot. Némi egyszerűsítés után az alábbi feltételre jutunk:

$$Id |\mathbf{r} - \mathbf{d}_0|^2 + I_0 d_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|^2 = 0. \quad (5.5)$$

Érdemes bevezetni a φ változót, mint az \mathbf{r} és \mathbf{e}_x vektorok által bezárt polárszöget. Ezt felhasználva az (5.5) egyenlet átírható:

$$Id (R^2 + d_0^2 - 2Rd_0 \cos \varphi) + I_0 d_0 (R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi) = 0. \quad (5.6)$$

Mivel a fenti feltételnek a φ szög minden értékére teljesülnie kell, a konstans, illetve koszinuszos tagoknak külön-külön is el kell tűnniük. Utóbbiból azonnal következik, hogy $I_0 = -I$, azaz a tüköráram a valódival azonos nagyságú, de ellentétes irányú. Ennek ismeretében a konstans tagok összegére az alábbi feltételt kapjuk:

$$d (R^2 + d_0^2) = d_0 (R^2 + d^2). \quad (5.7)$$

Ez egy másodfokú egyenlet a d_0 paraméterre vonatkozóan, amelynek egyetlen fizikailag érvényes, a hengerhéjon belül elhelyezett tüköráramot leíró megoldása $d_0 = R^2/d$. Ezzel a kívánt határfeltételt kielégítettük. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy a szupravezetőben indukált felületi áramok a hengeren kívül olyan mágneses mezőt gerjesztenek, amelyet egy, a tengelytől R^2/d távolságra elhelyezett, $-I$ áram hozna létre.

A fenti konklúzió ismeretében a valódi vezeték hosszegységére ható erő már könnyedén kiszámítható. A tüköráram által keltett mágneses mező a vezeték áramerőssége mindenhol merőleges, így az erősűrűség nagysága ezek szorzataként áll elő, iránya a jobbkéz-szabályból következik:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu_0 I^2 d}{2\pi(d^2 - R^2)} \mathbf{e}_x. \quad (5.8)$$

A testek között tehát taszítóerő lép fel, amely változatlan értékű marad, amennyiben a vezeték áramának irányát – és ezáltal a tüköráram irányát is – megfordítjuk.

(b)

Tekintsük ezután az alumíniumháló esetét. Ekkor azt kell felismernünk, hogy a háló kicsiny lyukain átmenő fluxusokat a szupravezető állapot konzerválja, azok lehűtés után nem változhatnak meg. Ez belátható, ha első lépésben észrevesszük, hogy a zérus ellenállás hozadékaként a szupravezető belsejében az elektromos térerősségnek el kell tűnnie, ellenkező esetben végtelen nagy áramok folynának. Ha pedig ezután alkalmazzuk a Faraday–Lenz-törvényt egy lyukat körülölelő szupravezető gyűrűre, akkor láthatjuk, hogy a fluxus változási sebessége is zérus, azaz a fluxus állandó. A határfeltétel tehát megváltozott az (a) feladatrészben tárgyalt esethez képest, így a tüköráramok módszerét is módosítanunk kell.

Mivel a rendszer az I árammal átjárt vezeték jelenlétében került szupravezető állapotba, a konzervált fluxus éppen az, amelyet az (5.1) egyenletben kifejezett indukció a felületen létrehoz. Emiatt a lehűtés után közvetlenül a szupravezetőben még nem folynak felületi áramok,



XVII. DÜRER VERSENY

F+
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

így erő sem hat, ez viszont megváltozik, ha a vezeték áramának irányát megfordítjuk. Hogy a határfeltételt ebben a helyzetben is kielégíthessük, helyezünk el *két tüköráramot* is, a szimmetriatengelytől R^2/d távolságra. Egyikük áramát válasszuk I értékűnek, ez a korábbiak szerint a vezeték $-I$ áramával együtt a felületen csak azzal párhuzamos indukciójárulékot hoz létre, így a lyukakban zérus fluxust eredményez. A másik tüköráram legyen szintén I erősségű, ez a felületen épp akkora fluxust hoz létre, mint a külső vezeték annak kezdeti állapotában. Összeségében tehát egy $2I$ erősségű tüköráram a tengelytől R^2/d távolságra elhelyezve kielégíti a határfeltételt, azaz olyan mágneses mezőt kelt, mint a szupravezető háló áramai.

A vezetékre ható hosszanti erősítés az előző feladatrészhöz hasonlóan ismét kiszámítható, végső soron az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu_0 I^2 d}{\pi(d^2 - R^2)} \mathbf{e}_x, \quad (5.9)$$

vagyis ismét taszítóerő, de nagysága kétszerese a tömör hengerhéj esetén mért értéknek.