



KIFEJTŐS FELADATSOR

XVII. DÜRER VERSENY

D
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

1. A Dürerenciás-tengeren sodródó kalózhajó legénysége három lányból, illetve három fiúból állt. Már régóta a tengeren hánykolódtak, amikor a hajó legénysége közül valaki, a monoton napjainak színesebbé tételéhez, egyedül lement a hajóaljba és ellopott onnan egy üveg rumot. A hajó legénysége a papagájuk segítségével szeretné kideríteni, hogy ki volt a tettes. A papagáj négyszer szólalt meg, amelyből kétszer csak igazat mondott, kétszer csak hazudott. Ki volt a tolvaj, ha az alábbiak voltak a papagáj megszólalásai?

- A fiúk egy portya miatt a lopás napján nem voltak a hajón.
- Jasmine és John mindig együtt lopnak. Joe nem járt a hajóaljban aznap.
- A tolvaj féllábú vagy félszemű volt. Jessica nem szereti a rumot.
- Van, hogy Jane vagy Jack egyedül lop. Jessica szereti a rumot.

A legénység lány tagjai Félszemű Jane, Ötujjú Jasmine és Kétfalábú Jessica, míg a fiúk Féllábú Jack, Vaksi John és Rőtszakáll Joe. A kalózokat a vezetékneveik jellemezik és másra nem igaz az adott tulajdonság.

2. a) Egy asztal köré egyszerre leült 14 ember. Miután leültek, az első percben néhány ember vidám, és mindenki más szomorú. Ahogy a vidám emberek vicceket mesélnek, úgy minden későbbi percben pontosan azok az emberek lesznek szomorúak, akiknek mindkét szomszédja szomorú volt az előző percben, a többiek pedig vidámak lesznek. Igaz-e, hogy akárhik is voltak szomorúak kezdetben, ha volt legalább egy vidám ember, akkor egy idő után mindenki folyamatosan vidám lesz?

b) Mi a helyzet akkor, ha 1001 ember ül le az asztal köré?

Ha egy vidám ember mellett két szomorú ember ül, akkor ő szomorú lesz.

3. Hét gyerek (A, B, C, D, E, F, G) bomba-pajzs játékot játszik. A játék egy fordulójának elején sípszóra mindenki választ magának a hat másik gyerek közül két különbözőt, egyiküket bombájának, másikukat pajzsának. Innentől 1 percük van arra, hogy elhelyezkedjenek a sík terepen, ezután mindenki egy helyben marad. Egy adott forduló végén azok a gyerekek kapnak pontot, akik az idő leteltével egy egyenesen állnak a választott bombájukkal és pajzsukkal úgy, hogy hármójuk közül a pajzs van középen.

a) Az egyik játékban a gyerekek a táblázatban látható módon választottak maguknak bombát és pajzsot. Mutassatok egy olyan felállást, ami esetén mind a hét gyerek szerez pontot a fordulóban.

gyerek	A	B	C	D	E	F	G
pajzs	D	A	A	G	G	C	C
bomba	F	E	G	E	B	B	D

b) Lehetséges-e, hogy a gyerekek úgy választanak maguknak bombát és pajzsot, hogy sehogya se tudnak beállni úgy, hogy mindenki szerezzen pontot a fordulóban?

c) Igaz-e, hogy ha egy fordulóban a gyerekek el tudnak helyezkedni úgy, hogy mindenki szerez pontot, akkor el tudnak helyezkedni úgy is, hogy mindenki szerezzen pontot és mindannyian egy egyenesen legyenek?

4. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I , az AB oldallal vett érintési pontja D , az AB oldal felezőpontja F . Bizonyítsátok be, hogyha $\frac{AD}{AF} = \frac{2}{3}$ és $\angle FIB < \angle ACI <$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

5. A $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmaz egy H részhalmazát nevezzük *elégségesnek*, ha tetszőleges 10-nél nagyobb egész szám előáll pontosan két olyan nemnegatív egész szám összegeként, melyeknek a számjegyei csak H -ből kerülnek ki.

a) Bizonyítsátok be, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz elégséges.

b) Bizonyítsátok be, hogy nem létezik négyelemű elégséges halmaz.

c) Mutassatok minél kisebb elemszámú elégséges halmazt és bizonyítsátok annak elégségeségét.



KIFEJTŐS FELADATSOR



XVII. DÜRER VERSENY

D
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

6. Játék: Kutatók a Dürerencicás-tóban felfedezték a kihaló-félben lévő egyenesenmozgó macskacápa faj egy nőstény példányát. Az állat a víz mélyén mozog, így befogásához három tengeralattjárót használnak. A kutatók kommunikálnak egymással és látják a cápát, továbbá a cápa is látja a kutatókat. A tó négyzet alakú és fel van osztva 5×5 darab négyzet alakú szektorra. Minden nap délben az egyik tengeralattjáró átúszik egy oldalszomszédos szektorba. A cápa 15 nap múlva nyugodt körülmények között tenné le a tojását, így addig menekülni próbál, ehhez minden éjszaka legfeljebb kétszer átúszik egy oldalszomszédos szektorba. A kutatók az első nap az alábbi kezdőhelyzetből mozognak először. A kutatók akkor nyernek, ha a 15. napig valamikor egy tengeralattjáró egy szektorba kerül a cápával, míg a cápa akkor nyer, ha még a 15. nap végén is szabad.

*Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban!
Ti dönthetitek el, hogy a kutatók vagy a cápa bőrébe szeretnétek bújni.*

			K	K
			K	K
C				

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVII. Dürer Verseny szervezői
